Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2009/2010
AL9 - Teoria dei Gruppi - Francesca Tartarone
Esercizi - 2 Ottobre 2009

Esercizio 1. Dimostrare che se $a \in G$ è l'unico elemento del proprio ordine allora $a = 1$ oppure $o(a) = 2$.

Esercizio 2. Se un gruppo G ha ordine pari, allora G contiene un numero dispari di involuzioni.

Esercizio 3. Dimostrare che se $a, b \in G$, $ab = ba$, $o(a), o(b) < \infty$, allora $o(ab)$ divide il m.c.m.$(o(a), o(b))$.
Inoltre, se M.C.D.$(o(a), o(b)) = 1$, allora $o(ab) =$ m.c.m.$(o(a), o(b))$.

Esercizio 4. Se $a \in G$ e $o(a) = n$, allora $o(a^k) = \frac{n}{\mathrm{MCD}(n,k)}$.

Esercizio 5. Dimostrare che D_6 contiene due sottogruppi isomorfi a S_3.

Esercizio 6. Classificare i gruppi di ordine $2p$, dove p è un numero primo.

Esercizio 7. Dimostrare che un sottogruppo di indice finito in un gruppo infinito ha intersezione non banale con ogni sottogruppo infinito del gruppo.

Esercizio 8. Dimostrare che $Aut(\mathbb{R}) = \{1\}$ e che $Aut(\mathbb{C})$ è infinito.

Esercizio 9. Dimostrare che un sottogruppo N di un gruppo G è normale se e solo se vale la seguente condizione:

$$x, y \in G, xy \in N \Rightarrow yx \in N.$$

Esercizio 10. Dimostrare che il prodotto e l'intersezione di due sottogruppi normali è normale.

Esercizio 11. Determinare i sottogruppi normali del gruppo diedrale D_4 e del gruppo delle permutazioni S_3.