

# AL5 Anelli Commutativi ed Ideali

A.A. 2008/2009

Stefania Gabelli e Francesca Tartarone

Questo corso è stato impartito sotto forma di corso di letture. Sono stati trattati capitoli scelti principalmente dai libri di R. Fossum [2] e R. Gilmer [3]. Tra gli argomenti affrontati segnaliamo i seguenti.

## 1. Domini di Prüfer (Prof. F. Tartarone)

Anelli locali: definizione e caratterizzazione attraverso l'insieme degli elementi invertibili. Anello delle frazioni  $S^{-1}D$  di un dominio  $D$ . Localizzazione di un anello. Corrispondenza fra gli ideali primi di  $D$  e gli ideali primi di  $S^{-1}D$ .

Dipendenza integrale. Caratterizzazione degli elementi interi su un dominio. La chiusura integrale di un dominio e le sue proprietà di anello. Teoremi di Incomparabilità, Going Up, Going Down in una estensione intera di anelli. Dimensione della chiusura integrale di un dominio. Esempi.

Valutazioni su un campo  $K$ . Definizione e primi esempi. Anelli associati ad una valutazione. Anelli di valutazione e corrispondenza fra anelli di valutazione con campo dei quozienti  $K$  e valutazioni su  $K$ . Sopranelli di anelli di valutazione. Ideali e spettro primo di un anello di valutazione. Gruppo dei valori associato ad un anello di valutazione.

Valutazioni discrete. Anelli di valutazione discreta e Noetherianità degli anelli di valutazione. PID locali.

Domini di Dedekind: definizione e caratterizzazioni varie. Ideali invertibili: caso particolare degli anelli semilocali. Piattezza degli ideali in un dominio. Carattere di finitezza in un dominio di Dedekind. Domini quasi Dedekind.

Domini di Prüfer. Definizione e prime caratterizzazioni. Gruppo delle classi. Domini di Bezout. Domini di Prüfer semilocali. Sopranelli di domini di Prüfer. Teorema Cinese dei Resti.

## 2. Domini di Krull (Prof. S. Gabelli)

I Domini di Krull come intersezione di domini di valutazione discrete. Valutazioni essenziali di un dominio di Krull. I domini noetheriani e integralmente chiusi sono di Krull. Gli UFD sono domini di Krull non necessariamente noetheriani.

Ideali divisoriali e  $t$ -ideali: caratterizzazioni. Star operazioni: definizione e prime proprietà. Ideali  $v$ -finiti e  $t$ -finiti. Ideali  $t$ -massimali. Un primo minimale su un principale è un  $t$ -ideale.

Elementi quasi interi e completa chiusura integrale. Un dominio  $A$  è completamente integralmente chiuso se e soltanto se ogni ideale non nullo  $I$  è  $v$ -invertibile se e soltanto se  $A = (I : I)$  per ogni  $I$ . I domini di Krull sono completamente integralmente chiusi.

La condizione della catena ascendente sugli ideali divisoriali. Condizioni equivalenti e prime conseguenze. Un dominio è di Krull se e soltanto se è completamente integralmente chiuso e soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali divisoriali. Un ideale di un dominio di Krull è divisoriale se e soltanto se è intersezione di potenze simboliche di primi di altezza uno.

Un dominio è di Krull se e soltanto se gli ideali divisoriali formano un gruppo libero generato dai primi di altezza uno. Il gruppo delle classi dei divisori. Ideali divisoriali e massimo comune divisore. Cenni sui domini PvMD e il gruppo delle classi dei  $t$ -ideali. I domini a fattorizzazione unica sono i domini di Krull con gruppo delle classi banale.

Estensioni di domini di Krull. Relazioni tra i gruppi delle classi dei divisori. La condizione PDE. Il Teorema di Nagata. Uso del Teorema di Nagata per il calcolo del gruppo delle classi.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] M. FONTANA, *Teoria delle valutazioni*. Appunti online per il corso AL5, raccolti da A. Fabbri, (2005).  
 [2] R. FOSSUM, *The Divisor Class Group of a Krull Domain*. Springer-Verlag, (1973).  
 [3] R. GILMER, *Multiplicative Ideal Theory*. Queen's Papers in Pure Applied Math., (1992).

### Bibliografia Supplementare

- [4] N. BOURBAKI, *Algèbre Commutative*. Hermann, Paris , (1961-1965).  
 [5] M. FONTANA, J. HUCKABA, I. PAPICK, *Prüfer domains*. Dekker, (1997).  
 [6] I. KAPLANSKY, *Commutative rings*. Allyn and Bacon, (1970).  
 [7] O. ZARISKI, P. SAMUEL, *Commutative Algebra*. Van Nostrand, (1958).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

L'esame consiste nello svolgimento di argomenti complementari al corso (seminario) e in un colloquio orale