**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009**
**AL2 - Algebra 2**
**Tutorato 7 - 25 Novembre 2008**
**Elisa Di Gloria, Matteo Acclavio**
www.matematica3.com

**Esercizio 1.**
Sia $A := \{\frac{m}{10^t} \in \mathbb{Q} \mid m, t \in \mathbb{Z},\ t \geq 0\}$.

**(a)** Verificare che $A$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$;

**(b)** Determinare gli elementi invertibili di $A$;

**(c)** Se $I$ è un ideale di $A$,provare che $I \cap \mathbb{Z}$ è un ideale di $\mathbb{Z}$;

**(d)** Provare che se $I \neq J$ sono due ideali di $A$, allora $I \cap \mathbb{Z} \neq J \cap \mathbb{Z}$;

**(e)** Provare che se $I$ è primo (risp. massimale), allora $I \cap \mathbb{Z}$ è primo in $\mathbb{Z}$ (risp. massimale);

**(f)** Provare che, per ogni $p \neq 2, 5$ e $p$ primo, $pA$ è un ideale massimale di $A$ e $pA \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

**Esercizio 2.**
Sia $< \sqrt[3]{2} > \subseteq \mathbb{C}$ il più piccolo sottoanello di $\mathbb{C}$ che contiene $\sqrt[3]{2}$. Darne una descrizione esplicita.

**Esercizio 3.**

**(1)** Siano $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ due ideali primi di un anello $A$, con $\mathcal{P}_1 \not\subset \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_2 \not\subset \mathcal{P}_1$, provare che $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ non è un ideale primo;

**(2)** Se $A$ è un anello, commutativo unitario ed $A/\mathcal{P}_1$ è finito, allora $\mathcal{P}_1$ è massimale;

**(3)** Se $\varphi : A \longrightarrow B$ è un omomorfismo di anelli e $\mathcal{Q}$ è un ideale primo di B, provare che $\varphi^{-1}(\mathcal{Q})$ è un ideale primo di $A$;

**(4)** Se $\mathcal{Q}$ è un ideale massimale in $B$, provare che in generale $\varphi^{-1}(\mathcal{Q})$ non è un ideale massimale in A.

**Esercizio 4.**
Determinare, nel gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo 1, gli elementi di ordine 6.

**Esercizio 5.**
Sia $\mathbb{Z}[X]$ l'anello dei polinomi nella indeterminata $X$ ed a coefficienti interi.
Sia $A \subseteq \mathbb{Z}[X]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti pari.

**(a)** Provare che $A$ è un ideale principale di $\mathbb{Z}[X]$;

**(b)** Provare che $A$ è un ideale primo di $\mathbb{Z}[X]$;

Sia $B \subseteq \mathbb{Z}[X]$ l'insieme dei polinomi il cui termine noto è pari.

**(a)** Provare che $B$ è un ideale di $\mathbb{Z}[X]$ generato da due elementi, ma non principale;

**(b)** Provare che $B$ è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[X]$;

**(c)** Determinare il campo quoziente $\mathbb{Z}[X]/B$.

**Esercizio 6.**
Nell'anello $A := \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ con le operazioni definite da:
$(a + bX) + (c + dX) = (a + c) + (b + d)X$
$(a + bX)(c + dX) = ac + (ad + bc)X$

**(a)** Provare che $X^2 = 0$;

**(b)** Dedurre da **(a)** che ogni ideale primo contiene $X$.

**Esercizio 7.**
Sia $A$ l'anello $M_2(\mathbb{Z})$ delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{Z}$

**(a)** Provare che $A$ è un anello unitario, ma non commutativo;

**(b)** Mostrare che se $p$ è primo, $I_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in p\mathbb{Z} \right\}$ è un ideale massimale di $A$;

**(c)** Provare che $A/I_p$ non è un corpo.

**Esercizio 8.**
Sia $R = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.

**(a)** Provare che $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in U(R)$;

**(b)** Mostrare che $R = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

**Esercizio 9.**
Descrivere i nuclei dei seguenti omomorfismi di anelli e dire se sono ideali primi o massimali:

**(a)** $\phi : \mathbb{R}[X, Y] \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\phi(f(X, Y)) = f(0, 0)$;

**(b)** $\phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ t.c. $\phi(f(X)) = f(2 + i)$.

**Esercizio 10.**
Dire se i seguenti ideali $I$ sono primi o no nell'anello $R$:

**(a)** $R := \mathbb{Z}$, $I := (17)$;

**(b)** $R := \mathbb{Z}[X]$, $I := (14, X)$.