Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL2 - Algebra 2
Tutorato 6 - 18 Novembre 2008
Elisa Di Gloria, Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Dati due ideali I e J, dimostrare che IJ e $I + J$ sono ideali.
Mostrare inoltre che $I + J = (I \cup J)$.

Esercizio 2.
Sia R un anello, I e J due suoi ideali.
Dimostrare che se $I + J = R$, allora $I \cap J = IJ$.

Esercizio 3.
Un elemento a di un anello si dice *nilpotente* se esiste un intero $n \geq 2$ tale che $a^n = 0$.
Sia R un anello, dimostrare che l'insieme degli elementi nilpotenti è un ideale.
Sia N tale ideale, dimostrare che R/N non ha elementi nilpotenti.

Esercizio 4.
Un elemento a di un anello si dice *idempotente* se $a^2 = 1$.
Sia R è un anello commutativo, unitario e $a \in R,\ a \neq 0, 1$, mostrare che:

(a) Se a è nilpotente, allora a è uno zero-divisore;

(b) Se a è idempotente, allora a è uno zero-divisore;

(c) Se a è nilpotente, allora a non è idempotente;

(d) Se a è nilpotente, allora ab è nilpotente, per ogni $b \in R$;

(e) Se $u \in R$ è invertibile e a è nilpotente, allora $u + ab$ è invertibile, per ogni $b \in R$.

Esercizio 5.
Sia $n \geq 2$ e $n = {p_1}^{e_1} .... {p_s}^{e_s}$ la sua fattorizzazione in numeri primi. Mostrare che $[a]_n \in Z_n$ è nilpotente se e soltanto se $p_1 ... p_s$ divide a

Esercizio 6.
Sia S un insieme. Mostrare che l'insieme dei sottoinsiemi finiti di S è un ideale di $\mathcal{P}(S)$.

Esercizio 7.
Sia $A := \{a/b \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ 3 \text{ non divide } b\}$.
Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

Esercizio 8.
Sia A un anello commutativo unitario.
Mostrare che $(a) = (ua)$, per ogni $u \in U(A)$.

Esercizio 9.
Si considerino in $\mathbb{Z}$ gli ideali $I = 126\mathbb{Z}$ e $J = 84\mathbb{Z}$.
Determinare gli ideali $I + J$, $I \cap J$ e IJ.