UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea in Matematica
AL2 - Algebra 2 - Gruppi, Anelli e Campi - A.A. 2008/2009
Appello A

MATRICOLA: ....
COGNOME: .... **NOME:** ....

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'utilizzo di libri e appunti.

ESERCIZIO 1. Sia $G := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_3,\ a \neq 0,\ b \neq 0 \right\}$.

(a) (3 pt) Provare che G con l'usuale moltiplicazione fra matrici è un gruppo. Dire se G è abeliano.
(b) (3 pt) Dimostrare che $H := \{M \in G : \det(M) = 1\}$ è un sottogruppo di G. Dire se H è un sottogruppo normale.
(c) (5 pt) Provare che H è ciclico e trovare un suo generatore.

ESERCIZIO 2. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ si consideri l'ideale $I := (3 + 11i, 3 + i)$.

(a) (3 pt) Stabilire se I è un ideale principale e, in tal caso, trovare un suo generatore.
(b) (3 pt) Stabilire se I è un ideale primo oppure no.
(c) (4 pt) Trovare, se esiste, l'inverso in $\mathbb{Z}[i]/I$ dei seguenti elementi:

$$7 - i + I, \quad 3i + I.$$

ESERCIZIO 3. Sia n un intero positivo e $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] := \{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Sia data la seguente applicazione:

$$\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{n}] \to \mathbb{Z}_n, \quad a + b\sqrt{n} \mapsto a \pmod{n}.$$

(a) (4 pt) Verificare che φ è un omomorfismo di anelli e trovare il nucleo e l'immagine.
(b) (2 pt) Stabilire per quali interi n il $ker(\varphi)$ è un ideale primo e/o massimale.
(c) (3 pt) Fissato $n = 12$, trovare la controimmagine dell'ideale $3\mathbb{Z}_{12}$ e dire se questo è un ideale primo di $\mathbb{Z}[\sqrt{12}]$.

ESERCIZIO 4. Sia dato il polinomio $f(X) := 4 + X + 4X^2 + X^3 \in \mathbb{Z}_5[X]$.

(a) (2 pt) Stabilire se $A := \mathbb{Z}_5[X]/(f(X))$ è un campo.
(b) (4 pt) Stabilire se l'elemento $\alpha + 1$, dove $\alpha = X + (f(X))$, appartiene al gruppo moltiplicativo $(U(A), \cdot)$. In caso affermativo calcolare il suo ordine.