UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea in Matematica
AL2 - Algebra 2 - Gruppi, Anelli e Campi - A.A. 2008/2009

II Esonero

MATRICOLA: ....
COGNOME: .... **NOME:** ....

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'utilizzo di libri e appunti.

ESERCIZIO 1. Sia dato il polinomio $f(X) := X^5 + 3X^3 + X^2 + 3 \in \mathbb{Z}_5[X]$.

(a) (2 pt) Descrivere il quoziente $\mathbb{Z}_5[X]/(f(X))$.
(b) (3 pt) Stabilire se il quoziente $\mathbb{Z}_5[X]/(f(X))$ è un campo oppure no.
(c) (5 pt) Dato il polinomio
$$g(X) := 6 + 4X + 2X^2 + X^3 + 2X^4 + 3X^5 + X^6 \in \mathbb{Z}_5[X],$$
scrivere la classe di $g(X)$ modulo $(f(X))$. Stabilire se $g(X)$ è invertibile modulo $(f(X))$ e, in caso affermativo, trovare l'inverso.

ESERCIZIO 2. Sia data l'omomorfismo di anelli:
$$\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_6, \quad f(X) \mapsto [f(2)]_6.$$

(a) (3 pt) Determinare il nucleo e l'immagine di φ e applicare il Teorema di Omomorfismo.
(b) (3 pt) Trovare la controimmagine dell'ideale $3\mathbb{Z}_6$ e stabilire se questo è un ideale primo in $\mathbb{Z}[X]$.

ESERCIZIO 3. Sia dato l'insieme $A := B + X\mathbb{Q}[X]$, dove B è un anello.

(a) (2 pt) Per $B := \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}$, stabilire quando A è un anello, un dominio o un campo.
(b) (4 pt) Preso $A : \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$, determinare gli elementi invertibili di A e descrivere tutti gli ideali primi di A che contengono X.

ESERCIZIO 4. Si consideri l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.

(a) (2 pt) Mostrare che in $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ non esistono elementi di norma 2 e 5.
(b) (4 pt) Fattorizzare come prodotto di elementi irriducibili l'elemento 10 in due possibili modi differenti.
(c) (2 pt) Calcolare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.