Corso di AL210 (Algebra 2)

Tutorato 2 del 10-10-2011

1. Dimostrare che, se G è un gruppo privo di sottogruppi non banali, allora G è un gruppo finito di ordine $|G| = p$, p primo.

2. Sia G un gruppo finito di ordine m; dimostrare che:

   - se $H \leq G$ è l'unico sottogruppo di ordine n, allora H è normale in G;
   - se $[G : H] = 2$, allora H è normale in G.

3. Si considerino i seguenti sottogruppi di A_4:
   $H := \langle (12)(34) \rangle$,
   $V := \langle (12)(34), (14)(23) \rangle$.
   Si dimostri che $H \trianglelefteq V$, $V \trianglelefteq A_4$, ma $H \ntrianglelefteq A_4$.

4. Siano:
   $$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} ,$$
   $$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}, ab \neq 0 \right\} .$$
   Dimostrare che $N \trianglelefteq H$ e $H \trianglelefteq GL_2(\mathbb{R})$.

5. Scrivere esplicitamente i sottogruppi $H := \langle \bar{4} \rangle$ e $K := \langle \bar{5} \rangle$ di $(\mathbb{Z}_{20}, +)$. Dopo aver giustificato il passaggio al quoziente, descrivere i gruppi quoziente $(\mathbb{Z}_{20}, +)/H$ e $(\mathbb{Z}_{20}, +)/K$. Calcolare, inoltre, l'ordine di ogni laterale.

6. Sia $G = GL_3(K)$, dove K è un campo con 5 elementi. Calcolare l'ordine di G e dimostrare che:

   - il gruppo delle matrici diagonali è un sottogruppo non normale di G;
   - il gruppo delle matrici scalari è un sottogruppo normale di G;
   - il gruppo delle matrici triangolari (superiori o inferiori) è un sottogruppo non normale di G;
   - il gruppo delle matrici triangolari con tutti 1 sulla diagonale è un sottogruppo non normale di G;
   - il gruppo delle matrici con determinante 1 è un sottogruppo normale di G.

   Si scriva l'ordine di tutti i sottogruppi elencati, si verifichi se sussistono inclusioni tra di essi e si determini se alcuni dei sottogruppi che non sono normali in G sono normali in eventuali sottogruppi intermedi.

   (Siano G un gruppo, $H \trianglelefteq G$ un sottogruppo normale ed $L \leq G$ un sottogruppo che contiene H, può accadere che $H \ntrianglelefteq L$?)

7. Date le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 9 & 8 & 10 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & 3 & 1 & 5 & 6 & 10 & 8 \end{pmatrix},$$

decomporre in cicli disgiunti e scrivere il segno di σ, τ, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^2, $\sigma^2\tau$, τ^2, $\tau^2\sigma$.