Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

AL210: Tutorato 10

A.A. 2011-2012 – Docente: Prof.ssa F. Tartarone

Mirko Moscatelli – Giorgio Scattareggia

12.12.2011

1. Sia $I := \{a + ib \,|\, a, b \in 2\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}[i]$.
   - Dimostrare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$.
   - Trovare un generatore di I, $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$.
   - Dire se I è un ideale primo e se γ è un elemento irriducibile.
   - Dire se I è un ideale massimale.
   - Scrivere esplicitamente gli elementi di $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{I}$, distinguendo gli invertibili e gli zero divisori.

2. Si consideri il dominio $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
   - Sia $I := \{a + b\sqrt{-5} \,|\, a, b \in 2\mathbb{Z}\}$:
     - ♯ verificare che I è un ideale principale di A, determinandone un generatore γ;
     - ♯ mostrare che γ è un elemento irriducibile di A;
     - ♯ mostrare che $I \cap \mathbb{Z}$ è un ideale primo di $\mathbb{Z}$;
     - ♯ mostrare che I non è un ideale primo di A;
     - ♯ dire se γ è un elemento primo di A.
   - Sia $J := \{a + b\sqrt{-5} \,|\, a \in 5\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$:
     - ♯ mostrare che J è un ideale di A;
     - ♯ mostrare che $J = \left(\sqrt{-5}\,\right)$;
     - ♯ mostrare che J è un ideale massimale di A †;
     - ♯ dire se $\sqrt{-5}$ è un elemento primo di A.

3. Siano

$$f(X) = 3X^4 + 4X^3 + 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X],$$
$$g(X) = 5X^3 + X^2 + 2X + 3 \in \mathbb{Z}[X].$$

Si dica se è possibile fare la divisione con resto tra f e g in $\mathbb{Z}$. Si scriva la divisione con resto tra f e g in $\mathbb{Q}$.

Posto

$$\pi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_7[X]\ ,\ a_nX^n + \ldots + a_0 \mapsto \bar{a_n}X^n + \ldots + \bar{a_0},$$

$$\bar{f}(X) := \pi(f(X))\ ,\ \bar{g}(X) := \pi(g(X)),$$

si scriva la divisione con resto tra $\bar{f}$ e $\bar{g}$ in $\mathbb{Z}_7$.

---

† Suggerimento. Si provi a mostrare che, se $a + b\sqrt{-5} \notin J$, allora $(J, a + b\sqrt{-5}) = A$. Potrebbe essere utile osservare che $(5) \subseteq J$.

4. Si consideri l'omomorfismo di anelli $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{R}$, $f(X) \mapsto f(\sqrt{2})$:

   - determinare $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$;
   - dedurne che $X^2 - 2$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[X]$.

5. Siano K un campo, $f(X) := X^2 + X + 1 \in K[X]$ ed $A := \dfrac{K[X]}{(f(X))}$.

   - Decomporre $f(X)$ in fattori irriducibili nei seguenti casi:

     $K = \mathbb{Z}_2$, $K = \mathbb{Z}_3$, $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$.
   - Stabilire le condizioni su $f(X)$ per le quali A è un campo.
   - In quali dei casi precedentemente considerati A è un campo?