Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Soluzioni II Esonero

Esercizio 1. Un elemento $a \neq 0$ contenuto in un anello A si dice nilpotente se esiste un intero $n > 1$ tale che $a^n = 0$. Provare che se A è commutativo e unitario, $a \in A$ è un elemento invertibile e $b \in A$ è un elemento nilpotente, allora $a + b$ è invertibile

Soluzione: DA INSERIRE

Esercizio 2. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ si consideri l'ideale $I := (5 + i, 1 + 3i)$.

(a) Stabilire se I è un ideale principale e, in tal caso, trovare un suo generatore.

(b) Stabilire se I è un ideale primo oppure no.

Soluzione:

(a) L'ideale I è principale perché $\mathbb{Z}[i]$ è un dominio Euclideo dunque anche un PID. Un generatore di I è dato dal massimo comune divisore di $5+i$ e $1+3i$. (Per questioni di norma, $N(5 + i) = 26 = 13 \cdot 2$ e $N(1 + 3i) = 10 = 5 \cdot 2$, le uniche possibilità per il MCD sono 1 e $1-i$, facendo il prodotto per $(1-i)^{-1}$ si trova che $(1 - i)$ divide entrambi).

Con l'algoritmo Euclideo, posto $\overline{y} := 1 - 3i$:

$$\begin{aligned}(5 + i)\overline{y} &= 8 - 14i \\ 8 &= 0 \cdot 10 + 8 = 1 \cdot 10 - 2 \\ -14 &= -1 \cdot 10 - 4 = -2 \cdot 10 + 6.\end{aligned}$$

Scegliendo $q = (1 - i)$ si ha $r = (5 + i) - (1 - i)(1 + 3i) = 1 - i$.

Dividendo $(1 + 3i)$ per $(1 - i)$ risulta:

$$\begin{aligned}(1 + 3i)(1 + i) &= -2 + 4i \\ -2 &= -1 \cdot 2 + 0 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0\end{aligned}$$

Da cui $(1 + 3i) = (-1 + 2i)(1 - i) + 0$. Ne segue che $I = (1 - i)$.

(b) L'ideale I è primo perché è generato da un elemento di norma 2 che è un numero primo.

Esercizio 3. Sia n un intero positivo e $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Sia data la seguente applicazione:

$$\varphi_n : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Z}_9, \quad a + b\sqrt{-5} \mapsto a + 5bn \pmod 9.$$

(a) (4 pt) Stabilire per quali $n(\mathrm{mod}\, 9)$, φ_n è un omomorfismo di anelli.

(b) (2 pt) Scegliere un n per il quale φ_n è un omomorfismo di anelli e trovare il nucleo e l'immagine di tale φ_n.

(c) (5 pt) Utilizzando lo stesso n del punto (b), trovare la controimmagine $\varphi_n^{-1}(6\mathbb{Z}_9)$ e, utilizzando il Teorema Fondamentale di Omomorfismo, descrivere il quoziente $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/\varphi_n^{-1}(6\mathbb{Z}_9)$.

Dire, infine, se $\varphi_n^{-1}(6\mathbb{Z}_9)$ è un ideale primo di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Soluzione:

(a) Si verifica facilmente che $\varphi_n(x+y) = \varphi_n(x) + \varphi_n(y)$, per ogni $n \geq 0$.

Il rpoblema si pone con il prodotto. Solo per i valori $n = 4, 5(\mathrm{mod}\, 9)$ is ha che $\varphi_n(xy) = \varphi_n(x)\varphi_n(y)$.

Infatti, siano $x = a + b\sqrt{-5}$ e $y = c + d\sqrt{-5}$. Allora:

$$xy = (ac - 5bd) + (ad + bc)\sqrt{-5} \Rightarrow \varphi_n(xy) = (ac - 5bd) + 5(ad + bc)n;$$

$$\varphi_n(x)\varphi_n(y) = (a + 5bn)(c + 5dn) = ac + 25bdn^2 + 5(ad + bc)n.$$

Uguagliando le due formule $(\mathrm{mod}\, 9)$, si ottiene:

$$-5bd \equiv 25bdn^2(\mathrm{mod}\, 9) \Rightarrow -5 \equiv 7n^2(\mathrm{mod}\, 9) \Rightarrow n^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 9).$$

Per cui, $n \equiv 4, 5(\mathrm{mod}\, 9)$.

(b) Scegliamo $n = 4$. Allora $Im(\varphi) = \mathbb{Z}_9$ e

$$ker(\varphi) = \{a + b\sqrt{-5}; a + 20b = 0(\mathrm{mod}\, 9)\} = \{a + b\sqrt{-5}; a \equiv 7b(\mathrm{mod}\, 9)\}.$$

(c) Si ha che $6\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\} \cong \mathbb{Z}_3$. Inoltre φ è suriettiva, quindi $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/ker(\varphi) \cong \mathbb{Z}_9/6\mathbb{Z}_9$ e questo ultimo è isomorfo a $\mathbb{Z}_3$. Ma $ker(\varphi) = \varphi_n^{-1}(6\mathbb{Z}_9) = \{a + b\sqrt{-5}; a + 20b = 0, 3, 6(\mathrm{mod}\, 9)\} = \{a + b\sqrt{-5}; a \equiv 7b, 7b+3, 7b+6(\mathrm{mod}\, 9)\}$. Ne segue che $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/\varphi_n^{-1}(6\mathbb{Z}_9) \cong \mathbb{Z}_3$ e quindi $\varphi_n^{-1}(6\mathbb{Z}_9$ è primo e massimale.

Poiché $\mathbb{Z}_9/6\mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_3$, l'applicazione

Esercizio 4. Sia dato il polinomio irriducibile $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$. Sia α una radice di $f(X)$ in una estensione di $\mathbb{Z}_3$. Costruire un campo di cardinalità 81, $\mathbb{F}_{81} = \mathbb{Z}_3(\alpha)$, e determinare l'inverso di α^2.

Soluzione: Per la costruzione del campo visionare i libri di testo o gli appunti presi in classe. L'inverso di α^2 è esattamente α^3.

Esercizio 5. Sia $I = \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid f(\sqrt{2}) = 0 \text{ e } f(\sqrt{3}) = 0\}$.

(a) (2 pt) Provare che I è ideale di $\mathbb{R}[X]$ e descrivere un suo sistema di generatori.

(b) (2 pt) Provare che I non è ideale primo.

Soluzione:

(a) $I = ((X - \sqrt{2}) \cdot (X - \sqrt{3}))$.

(b) I non è primo perché $(X - \sqrt{2}) \cdot (X - \sqrt{3}) \in I$, ma $(X - \sqrt{2}) \notin I$ e $(X - \sqrt{3}) \notin I$.