Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 4 (14 Ottobre 2011)

Esercizio 1. Data $\sigma := (13)(245) \in S_5$ e l'insieme $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ si consideri l'azione del gruppo $< \sigma >$ su X: $\tau \cdot x := \tau(x)$, per ogni $\tau \in < \sigma >$, $x \in X$. Descrivere l'orbita e lo stabilizzatore di ogni elemento di X.

Soluzione: Le orbite dell'azione di $< \sigma >$ su X sono le seguenti:

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(3) = \{1, 3\}$$
$$\mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(4) = \mathcal{O}(5) = \{2, 4, 5\}.$$

I rispettivi stabilizzatori sono invece:

$$\mathrm{St}_1 = \mathrm{St}_3 = \{\mathrm{id}, \sigma^2, \sigma^4\}$$
$$\mathrm{St}_2 = \mathrm{St}_4 = \mathrm{St}_5 = \{\mathrm{id}, \sigma^3\}$$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n con base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Sia S_n il gruppo simmetrico su n elementi.
Si consideri l'applicazione $S_n \times V \to V$ definita nel seguente modo: se $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ e $\sigma \in S_n$, allora:

$$\sigma \cdot v := \lambda_1 e_{\sigma(1)} + \dots \lambda_n e_{\sigma(n)}.$$

(a) Provare che $\cdot$ è un'azione di S_n sull'insieme V.

(b) Siano $n = 4$, $v := e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $w := e_1 + e_3$.

   i. Determinare $(1342) \cdot v$, $(1432) \cdot w$, $(412) \cdot w$, $(14) \cdot w$.

   ii. Determinare l'orbita e lo stabilizzatore di v e w.

   iii. Lo stabilizzatore di w è normale in S_4?

Soluzione:

(a) Sia $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, allora $\mathrm{id} \cdot v = \lambda_1 e_{\mathrm{id}(1)} + \cdots + \lambda_n e_{\mathrm{id}(n)} = v$.
Siano σ_1 e $\sigma_2 \in S_n$;

$$(\sigma_2 \circ \sigma_1) \cdot v = \lambda_1 e_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(1)} + \cdots + \lambda_n e_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(n)} =$$
$$= \sigma_2 \cdot (\lambda_1 e_{\sigma_1(1)} + \cdots + \lambda_n e_{\sigma_1(n)}) = \sigma_2 \cdot (\sigma_1 \cdot v).$$

(b) i. Si verifica facilmente che $\sigma \cdot v = v$ per ogni $\sigma \in S_4$. $(1432) \cdot w = e_1 + e_4$; $(412) \cdot w = e_2 + e_3$; $(14) \cdot w = e_3 + e_4$.

   ii. $\mathcal{O}(v) = \{v\}$; $\mathcal{O}(w) = \{e_i + e_j \mid i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j\}$. Gli stabilizzatori sono invece dati da: $\mathrm{St}_v = S_4$, mentre $\mathrm{St}_w = \{\mathrm{id}, (13), (24), (13)(24)\}$.

iii. Sia $\sigma := (123) \in S_4$. Si ha $\sigma \circ (13) \circ \sigma^{-1} = (12) \notin \mathrm{St}_w$ e dunque St_w non è normale in S_4. Si può giungere alla stessa conclusione osservando che $\mathrm{St}_w \cong V$, gruppo di Klein, e V non è normale in S_4

Esercizio 3. Sia G un gruppo che agisce su un insieme X e su un insieme Y. Dimostrare che G agisce sul prodotto cartesiano $X \times Y$:

$$g \cdot (x, y) := (g \cdot x, g \cdot y).$$

Dimostrare inoltre che preso comunque un elemento $(x, y) \in X \times Y$, lo stabilizzatore $\mathrm{St}_{(x,y)} = \mathrm{St}_x \cap \mathrm{St}_y$ e l'orbita $\mathcal{O}((x, y)) \subseteq \mathcal{O}(x) \times \mathcal{O}(y)$.

Soluzione: Per dimostrare che $g \cdot (x, y) := (g \cdot x, g \cdot y)$ è un'azione, dobbiamo far vedere che per ogni $(x, y) \in X \times Y$ e per ogni $g, h \in G$:

(a) $e_G \cdot (x, y) = (x, y)$;

(b) $g \cdot (h \cdot (x, y)) = (gh) \cdot (x, y)$.

Per la condizione (a) si ha: $e_G \cdot (x, y) \overset{(\star)}{=} (e_G \cdot x, e_G \cdot y) = (x, y)$ Per la condizione (b) invece:

$$g \cdot (h \cdot (x, y)) = g \cdot (h \cdot x, h \cdot y) \overset{(\star)}{=} ((gh) \cdot x, (gh) \cdot y) = (gh) \cdot (x, y).$$

dove nelle uguaglianze denotate con $(\star)$ si è usato il fatto che $\cdot$ è un'azione di G su X e Y rispettivamente.

Dato un elemento $(x, y) \in X \times Y$, si ha:

$$g \in \mathrm{St}_{(x,y)} \Leftrightarrow (g \cdot x, g \cdot y) = (x, y) \Leftrightarrow g \cdot x = x \text{ e } g \cdot y = y \Leftrightarrow g \in \mathrm{St}_x \cap \mathrm{St}_y.$$

Dalla definizione di orbita inoltre segue immediatamente che:

$$\mathcal{O}((x, y)) = \{(g \cdot x, g \cdot y) : g \in G, x \in X, y \in Y\} \subseteq \mathcal{O}(x) \times \mathcal{O}(y).$$

È opportuno osservare che le stesse argomentazioni possono essere utilizzate anche se si considera un gruppo G che agisce su n insiemi, dove n è un intero positivo qualunque, per concludere che G agisce sul loro prodotto cartesiano.

Esercizio 4. Sia G un gruppo e H un sottogruppo di G tale che G/H è abeliano. Dimostrare che se K è un sottogruppo di G che contiene H, allora K è normale in G.

Soluzione: Dato un omomorfismo $\varphi : G \to G'$, si ha una biiezione tra i sottogruppi (risp. sottogruppi normali) di G che contengono $\ker \varphi$ e i sottogruppi (risp. sottogruppi normali) di G'. Per dimostrare che K è normale in G, è dunque sufficiente osservare che K/H è necessariamente un sottogruppo normale di G/H perché quest'ultimo è abeliano ed utilizzare la corrispondenza tra sottogruppi normali per l'omomorfismo $G \to G/H$ di nucleo H.

Esercizio 5. Dato il sottogruppo $H := \{a + ib \in \mathbb{C} : a = b\}$, dimostrare che $\mathbb{C}/H \cong \mathbb{R}$.

Soluzione: Consideriamo la seguente applicazione:

$$\begin{array}{rcc} \psi : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a + ib & \longmapsto & a - b \end{array}$$

Non è difficile verificare che ψ è un omomorfismo di gruppi (additivi), infatti:

$$\begin{aligned} \psi(a+ib) + \psi(c+id) &= a - b + c - d \;=\; a + c - (b+d) = \\ &= \psi((a+c) + i(b+d)) \;=\; \psi((a+ib) + (c+id)). \end{aligned}$$

Un elemento $z = a + ib \in \ker\psi \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow z \in H$. Inoltre l'omomorfismo ψ è suriettivo infatti dato comunque $r \in \mathbb{R}, r = \psi(0 - ir)$. Applicando il primo teorema di omomorfismo si ha che $\mathbb{C}/H \cong \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Sia G un gruppo con 20 elementi. Stabilire se esiste un omomorfismo $\varphi : G \to G$ tale che $\ker\varphi = \operatorname{Im}\,\varphi$.

Soluzione: Se il gruppo G ha 20 elementi, il nucleo dell'omomorfismo φ può avere $2, 4, 5$ o 10 elementi. Applicando il primo teorema di omomorfismo, per nessuna delle possibili scelte per $\ker\varphi$ si ha $|\ker\varphi| = |\operatorname{Im}\varphi|$ e dunque non si può avere l'uguaglianza richiesta. Ne segue che una condizione necessaria (non sufficiente) affinché si possa avere $\ker\varphi = \operatorname{Im}\,\varphi$ è che il numero di elementi di G sia uguale ad un quadrato perfetto.

Esercizio 7. Siano $\varphi : G \to H_1$ e $\psi : G \to H_2$ omomorfismi di gruppi. Dimostrare che se $\ker\varphi = \ker\psi$ allora $\operatorname{Im}\,\varphi \cong \operatorname{Im}\,\psi$.

Soluzione: Basta applicare il primo teorema di omomorfismo.