Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 2 (30 Settembre 2011)

Esercizio 1. Sia G un gruppo, H un sottogruppo di G ed N un sottogruppo normale di G. Dimostrare che $H \cap N$ è un sottogruppo normale di H. Stabilire se $H \cap N$ è normale anche in N e/o in G.

Soluzione: Affinché $H \cap N$ sia normale in H si deve avere $h^{-1}(H \cap N)h = H \cap N$, per ogni $h \in H$ oppure, equivalentemente, $hxh^{-1} \in H \cap N$ per ogni $h \in H$ e $x \in H \cap N$. È subito visto che: $h^{-1}xh \in H$, in quanto prodotto di elementi di H che è un sottogruppo e $h^{-1}xh \in N$, essendo N normale in G.

Non è vero che $H \cap N$ è normale in N, basta prendere $N = G$ ed H un sottogruppo non normale di G.

Non è vero che $H \cap N$ è normale in G, si può utilizzare il medesimo esempio di sopra.

Esercizio 2. Siano G un gruppo e H, K sottogruppi di G. Dimostrare che:

(a) $HK := \{hk : h \in H, k \in K\}$ è un sottogruppo di G se e solo se $HK = KH$;

(b) se H è normale in G, allora HK è un sottogruppo di G;

(c) se H e K sono normali in G allora HK è normale in G.

Soluzione:

(a) Supponiamo $HK \leq G$, allora $H, K \subseteq HK$ da cui $kh \in HK$ per ogni $k \in K$ e $h \in H$, ovvero $KH \subseteq HK$. Sia ora $x \in HK$, poiché HK è un gruppo anche $x^{-1} \in HK$, dunque se $x = hk$ per certi $h \in H$ e $k \in K$, si ha che $x^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$. Poiché ciò vale per ogni $x \in HK$ si ha che $HK \subseteq KH$.
Supponiamo viceversa che $HK = KH$. $1 \in HK$ e se $x \in HK$, $x = hk$ per un qualche $h \in H$ e $k \in K$. Ne segue che $y := k^{-1}h^{-1} \in KH = HK$ e $xy = 1$. Facciamo vedere che se $x, y \in HK$ anche $xy \in HK$; sia $x = hk$ e $y = h_1k_1$, allora $xy = hkh_1k_1 = h(h'k')k_1$ dato che $HK = KH$, dunque $xy = (hh')(k'k_1) \in HK$.

(b) Dal fatto che H è normale segue che $HK = KH$ e dunque è un sottogruppo di G.

(c) Se H e K sono normali in G si ha, per ogni $g \in G$:

$$gHK = HgK = HKg.$$

Esercizio 3. Per ogni $a, b \in (G, \star)$ si calcoli l'ordine di $a, b, a \star b$:

(a) $a = \overline{7}, b = \overline{3} \in (\mathbb{Z}_{36}, +)$.

(b) $a = (\overline{1}, \overline{2}), b = (\overline{2}, \overline{2}) \in (\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6, +)$.

(c) $a = (123)(23)(56)$, $b = (24)(1536) \in (S_6, \circ)$.

(d) $a = \rho^3$, $b = \rho^2\sigma \in (D_6, \circ)$.

(e)

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in (GL_2(\mathbb{R}), \cdot).$$

Esercizio 4. In ognuno dei seguenti casi scrivere esplicitamente le classi laterali destre di H in G e l'indice $[G : H]$.

(a) $H =< (12), (34) >$, $G = (S_4, \circ)$.

(b) $H = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}\}$, $G = (\mathbb{Z}_{16}, +)$.

(c) $H =< (\overline{0}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{0}) >$, $G = (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, +)$.

(d) $H = \{(12)(34), \mathrm{id}\}$, $G = (D_4, \circ)$.

Esercizio 5. Mediante il procedimento utilizzato per dimostrare il teorema di Cayley, si identifichino i seguenti gruppi come sottogruppi di un opportuno gruppo simmetrico:

$$(\mathbb{Z}_4, +); \quad (V, \cdot); \quad (S_3, \circ).$$

Soluzione: Si verifica facilmente che le applicazioni proposte sono effettivamente isomorfismi.

(a) Denotiamo con $0, 1, 2, 3$ gli elementi di $\mathbb{Z}_4$ e sia $\sigma := (1234) \in S_4$. Z_4 è isomorfo a $\langle\sigma\rangle$ tramite il seguente isomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & \langle\sigma\rangle \\ 0 & \longmapsto & \mathrm{id} \\ 1 & \longmapsto & \sigma \\ 2 & \longmapsto & \sigma^2 = (13)(24) \\ 3 & \longmapsto & \sigma^3 = (1432). \end{array}$$

(b) Denotiamo con $1, x, y, z$ i 4 elementi di V ricordando che $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ e $xy = z = yx$, $zy = x = yz$ e $xz = y = zy$. Un sottogruppo di S_4 isomorfo a V è dunque dato da: $H := \{\mathrm{id}, (12), (34), (12)(34)\}$, dove:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V & \longrightarrow & H \\ 1 & \longmapsto & \mathrm{id} \\ x & \longmapsto & (12) \\ y & \longmapsto & (34) \\ z & \longmapsto & (12)(34). \end{array}$$

(c) S_3 è di per sé un gruppo simmetrico e dunque non c'è niente da dimostrare. Il procedimento del Teorema di Cayley può essere comunque utilizzato per immergere S_3 in S_6: $S_3 = \{\mathrm{id}, (12), (23), (13), (123), (132)\}$. Etichettiamo tali elementi nel seguente modo: $e := \mathrm{id}$; $x := (12)$; $y := (23)$; $z :=$

(13); $u := (123)$, $v := (132)$. Possiamo dunque vedere S_6 come $S(X)$ dove $X := \{e, x, y, z, u, v\}$. Allora l'isomorfismo cercato è dato da:

$$\begin{array}{rcl}
\varphi : S_3 & \longrightarrow & K \leq S_6 \\
e & \longmapsto & \mathrm{id} \\
x & \longmapsto & (ex)(yu)(zv) \\
y & \longmapsto & (ey)(xv)(zu) \\
z & \longmapsto & (ez)(xu)(yv) \\
u & \longmapsto & (euv)(xzy) \\
v & \longmapsto & (evu)(xyz).
\end{array}$$