Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 11 (9 Dicembre 2011)

Esercizio 1. Sia A un dominio euclideo con valutazione euclidea δ. Dimostrare l'esattezza dell'algoritmo euclideo delle divisioni successive per determinare il MCD di due elementi non nulli di A.

Esercizio 2. (a) Determinare il MCD di $f(X) = X^5 + X^3 + 3X^2 + 1$ e $g(X) = 2X^4 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

(b) Determinare il MCD di $f(X) = 3X^4 + X^3 + 1$ e $g(X) = 2X^3 + 5X + 3 \in \mathbb{Z}_7[X]$

Esercizio 3. Sia A un dominio euclideo e $a, b \in A^*$. Dimostrare che se b divide a e $\delta(b) = \delta(a)$, allora a e b sono associati.

Esercizio 4. Stabilire se l'ideale $I := (X^3 - X + 1)$ è massimale e/o primo in $\mathbb{Z}[X]$

Esercizio 5. Sia $f_a(X) = X^3 - a \in \mathbb{Q}[X]$. Determinare $a \in \mathbb{Q}$ tale che $\mathbb{Q}[X]/(f_a(X))$ non è un campo, ma $X + (f_a(X))$ è invertibile in $\mathbb{Q}[X]/(f_a(X))$.

Esercizio 6. Dimostrare che l'ideale $I := (X^3 + 1)$ non è massimale in $\mathbb{R}[X]$ e determinare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{R}[X]$ che contengono I.