Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 10 (2 Dicembre 2011)

Esercizio 1. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$:

(a) Determinare il quoziente e il resto della divisione di $1+5i$ per $2+3i$ e per $4-i$.

(b) Fattorizzare 5 nel prodotto di elementi irriducibili.

Esercizio 2. Dimostrare che l'ideale $(2, 1+\sqrt{-3}) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ non è principale (e dunque $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ non è un PID).

Soluzione: Supponiamo per assurdo che $I := (2, 1+\sqrt{-3})$ sia principale. Allora deve esistere $z \in D$ tale che $zD = I$. In particolare si deve avere $2, 1+\sqrt{-3} \in zD$.

Ne segue che $2 = zx$ e $1+\sqrt{-3} = zy$, esistono $x, y \in D$. Poiché la norma è moltiplicativa si ha inoltre che $N(1+\sqrt{-3}) = 4 = N(2) = N(z)N(x) = N(z)N(y)$. E dunque la norma di $z = 1, 2, 4$. Se z ha norma 1, allora z è invertibile ed è uguale a ± 1, da cui $zD = D \supsetneq I$ che è assurdo. Allora la norma di z è uguale a 2 oppure 4. Se z avesse norma 4, $N(x) = N(y) = 1$, ovvero $x, y = \pm 1 \in U(D)$ e $2 \sim z \sim 1+\sqrt{-3}$ che non è possibile perché $2 \neq \pm(1+\sqrt{-3})$.

Inoltre in D non esistono elementi di norma 2, perché si dovrebbe avere $a^2+3b^2 = 2$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, che non è possibile. Avendo escluso tutte le possibilità per i valori di $N(z)$ possiamo concludere che I non è principale in D.

Esercizio 3. Sia D un dominio a ideali principali e I un ideale non banale di D. Dimostrare che nel quoziente D/I ogni elemento non invertibile è un divisore dello zero.

Soluzione: In un dominio a ideali principali D ogni coppia di elementi x, y (non nulli) possiede un massimo comune divisore (PID $\Rightarrow$ UFD $\Rightarrow$ MCD), inoltre tale massimo comune divisore si può esprimere mediante un'identità di Bézout (PID $\Rightarrow$ Bézout).

Sia $I = xD$ un ideale non banale di D, facciamo vedere che se $\mathrm{MCD}(x, y) = 1$ allora $y \in U(D/I)$. Sia $1 = \alpha x + \beta y$ una identità di Bézout, ovvero $1 + I = (\alpha x + \beta y) + I = (\alpha x + I) + (\beta y + I) = I + (\beta + I)(y + I)$, quindi $y + I$ è invertibile in D/I (e il suo inverso è $\beta + I$).

Sia ora $z + I \in D/I$ un elemento non invertibile, allora $\mathrm{MCD}(z, x) = d \neq 1$, e $d = ux + vz$. Sia $w \in D$ tale che $wd = x$ (un tale elemento $w \notin xD$ esiste in quanto $d \mid x$ e $d \neq 1$). Allora $w + I \neq I$ e $vz + I \neq I$, ma $(w + I)(vz + I) = I$ perché $wvz = wd - wux \in I$.

Esercizio 4. Sia p un primo e

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ p \not| b \right\}.$$

(a) Determinare tutti gli elementi irriducibili di $\mathbb{Z}_{(p)}$.

(b) Dimostrare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un dominio euclideo con la norma $\delta : \mathbb{Z}_{(p)}^* \to \mathbb{N}$, $a/b \mapsto v_p(a)$, dove

$$v_p(a) := \max\{k \in \mathbb{Z} : p^k \mid a\}.$$