Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 1 (23 Settembre 2011)

Esercizio 1. Si dimostri che:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\},$$

è un sottogruppo ciclico di $GL_3(\mathbb{R})$.

Soluzione: Facciamo vedere che H è generato dal seguente elemento:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per induzione su $n \geq 1$. La base dell'induzione è facilmente verificata, supponiamo dunque che:

$$A^{n-1} := \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)^2-(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

allora

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{(n-1)^2-(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $n < 0$ si ha $n = -k$ con $k > 0$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e, anche in questo caso, $A^{-k} = (A^{-1})^k = \begin{pmatrix} 1 & -k & \frac{(-k)^2+k}{2} \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dunque H è generato da A.

Esercizio 2. Siano $(G, \star)$ e $(H, \bullet)$ due gruppi.

(a) Mostrare che l'insieme $G \times H$ è un gruppo rispetto all'operazione binaria $\cdot$ così definita:

$$(g, h) \cdot (g', h') := (g \star g', h \bullet h'), \qquad (g, h), (g', h') \in G \times H.$$

(b) Dimostrare che $\overline{H} := \{(g, e_H) : g \in G\}$ e $\overline{G} := \{(e_G, h) : h \in H\}$ sono sottogruppi di $G \times H$.

Soluzione:

(a) Dobbiamo verificare che:

- $\cdot$ è associativa:
$((g,h)(g',h'))(g'',h''') = (g\star g', h\bullet h')(g'',h'') = ((g\star g')\star g'', (h\bullet h')h'') = (g\star(g'\star g''), h\bullet(h'\bullet h'')) = (g,h)((g',h')(g'',h''))$.
- In $G \times H$ esiste l'elemento neutro:
Siano e_G, e_H gli elementi neutri rispettivamente di G, H. Allora $(g,h)(e_G,e_H) = (g\star e_G, h\bullet e_H) = (g,h)(e_G\star g, e_H\bullet h) = (e_G,e_H)(g,h)$.
- Per ogni elemento in $G \times H$ esiste il suo inverso:
$(g,h)(g^{-1},h^{-1}) = (g\star g^{-1}, h\bullet h^{-1}) = (e_G,e_H) = (g^{-1}\star g, h^{-1}\bullet h) = (g^{-1},h^{-1})(g,h)$.

(b) Facciamo vedere che dati $h, h' \in H$ si ha: $(e_G,h)(e_G,h')^{-1} \in \overline{H}$: $(e_G,h)(e_G,h')^{-1} = (e_G,h)(e_G,h'^{-1}) = (e_G\star e_G, h\bullet h'^{-1}) \in \overline{H}$, poiché $h\bullet h'^{-1} \in H$.
La dimostrazione per $\overline{G}$ è analoga.

Esercizio 3. Si provi che l'insieme:

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R};\ a,b \text{ non contemporaneamente nulli} \right\}$$

è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$ (con l'usuale prodotto righe per colonne).

Soluzione: Innanzitutto $I_2 \in S$. Osserviamo che la condizione a,b non contemporaneamente nulli è equivalente a $\det(A) = a^2 + b^2 \neq 0$. Dunque $S \subseteq GL_2(\mathbb{R})$.

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

e dunque anche $A^{-1} \in S$. Siano ora:

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in S \Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix},$$

con $a' := ac - bd$ e $b' = ad + bc$. Resta da far vedere che a' e b' non possono essere contemporaneamente nulli, o equivalentemente che $(a')^2 + (b')^2 \neq 0$. Si ha che:

$$(a')^2 + (b')^2 = a^2b^2 - 2acbd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd = a^2b^2 + b^2d^2 + b^2c^2 \neq 0.$$

Esercizio 4. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Un sottoinsieme H di G si dice *stabile* se per ogni $a,b \in H$ si ha $ab \in H$. Dimostrare che un sottoinsieme stabile e non vuoto di un gruppo finito G è un sottogruppo di G.

Soluzione: Dobbiamo verificare che l'inverso di ogni elemento di H appartiene ad H, da cui seguirà che anche l'elemento neutro $e_G \in H$.

Poiché $H \neq \emptyset$ esiste $a \in H$. L'ordine di a in G è finito perché G è un gruppo finito. Sia $k := o(a)$. Essendo H stabile, non è difficile dimostrare che $a \in H \Rightarrow a^{k-1} = a^{-1} \in H$. Dunque $e_G = a^k = a^{k-1}a \in H$.

Esercizio 5. Sia G un gruppo abeliano.

(a) Siano $a, b \in G$ tali che $o(a) = m$ e $o(b) = n$. Dimostrare che $o(ab)$ divide mn.

(b) Dimostrare che gli elementi di G che hanno ordine finito formano un sottogruppo di G.

Soluzione: Siano $a, b \in G$ di ordine finito, rispettivamente uguale ad m ed n. Poiché G è abeliano si ha: $(ab)^{mn} = a^m b^n = e_G$ e dunque l'ordine di ab è finito (e divide mn). Inoltre se a è di ordine finito allora $o(a^{-1}) = o(a)$ è finito.

Esercizio 6. Siano $S \neq \emptyset$ un insieme ed $(G, \cdot)$ un gruppo. Si definisca sull'insieme:

$$G^S := \{f : S \longrightarrow G : f \text{ applicazione}\}$$

l'operazione di prodotto puntuale:

$$(fg)(x) := f(x)g(x), \quad f, g \in G^S.$$

Si dimostri che:

(a) G^S è un gruppo.

(b) G^S è abeliano se e solo se G è abeliano.

Soluzione:

(a) Per dimostrare che G^S è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto puntuale, dobbiamo verificare che:

- vale la proprietà associativa, ovvero, per ogni $f, g, h \in G^S$, $(f(gh))(x) = ((fg)h)(x)$ per ogni $x \in S$. Poiché G è un gruppo, in G vale la proprietà associativa (applicata in (!)), dunque:

$$\begin{aligned}(f(gh))(x) &= (f(x)(gh(x))) = (f(x)(g(x)h(x))) \overset{(!)}{=} (f(x)g(x))h(x) = \\ &= (fg(x))h(x) = ((fg)h)(x).\end{aligned}$$

- Esistenza dell'elemento neutro $e : S \to G$ tale che per ogni $f \in G^S$, $(ef)(x) = f(x) = (fe)(x)$ per ogni $x \in S$. Sia e_G l'elemento neutro di G, allora per $e : S \to G$; $x \mapsto e_G$ si ha:

$$(ef)(x) = e(x)f(x) = e_G f(x) = f(x) = f(x)e_G = f(x)e(x) = (fe)(x).$$

- Esistenza dell'inverso di ogni elemento. Per ogni $f \in G^S$, dobbiamo verificare che esista un elemento $g \in G^S$ tale che $fg = e = gf$, dove e è l'elemento neutro di G^S trovato al punto precedente.

  Denotiamo con $f(x)^{-1} \in G$ l'inverso di $f(x) \in G$ (G è un gruppo!), allora l'applicazione $g : S \to G$; $x \mapsto f(x)^{-1}$ verifica $fg = e = gf$ ed è l'inverso dell'elemento $f \in G^S$.

(b) G^S è abeliano se e solo se per ogni $f, g \in G^S$ $fg = gf$, ovvero se e solo se $(fg)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (gf)(x)$ per ogni $x \in S$. Dunque se G è abeliano anche G^S lo è. Viceversa dati due elementi $a, b \in G$ tali che $ab \neq ba$ e prendendo $f : S \mapsto G$ con $f(x) = a$ per ogni $x \in S$ e $g : S \mapsto G$ con $g(x) = b$ per ogni $x \in S$, è immediato verificare che $fg \neq gf$ e dunque G^S non è abeliano.

Esercizio 7. Sia $G := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = ax + b; (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$. Dimostrare che:

(a) G è un sottoinsieme di $S(\mathbb{R})$, applicazioni biiettive di $\mathbb{R}$ in sé;

(b) G è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni. Stabilire se è abeliano.

(c) Sia dato il sottoinsieme $T := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x + b; b \in \mathbb{R}\}$ di G. Dimostrare che T è un sottogruppo abeliano di G.

Soluzione:

(a) Per dimostrare che G è un sottoinsieme di $S(\mathbb{R})$ bisogna verificare che ogni $f \in G$ è una biiezione.

Sia dunque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto ax + b$ in G. L'applicazione f è iniettiva infatti:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Sia poi $y \in \mathbb{R}$, si ha: $y = f(\frac{y-b}{a})$ e dunque f è anche suriettiva.

(b) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto ax + b$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto cx + d$ ed $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto ux + v$ in G. Non è difficile dimostrare che G è chiuso rispetto alla composizione di funzioni, infatti:

$$(f \circ g)(x) = (ac)x + (ad + b) \Rightarrow (f \circ g) \in G.$$

Facciamo vedere che vale la proprietà associativa, ovvero $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. Si ha:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(ux + v) = (acu)x + (acv + ad + b)$$
$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((cu)x + (cv + d)) = (acu)x + (acv + ad + b).$$

Chiaramente G ha elemento neutro dato dall'applicazione identità.

Data $f \in G$ come sopra, è immediato verificare che l'inverso di f è l'applicazione $x \mapsto \frac{x-b}{a}$.

Il gruppo G non è abeliano, infatti, con le stesse notazioni utilizzate precedentemente si ha:

$$(g \circ f)(x) = (ac)x + (cb + d) \neq (f \circ g)(x).$$

(c) Siano $t_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x + b_1$ e $t_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x + b_2$ in T.

$$(t_1 \circ t_2^{-1})(x) = t_1(x - b_2) = x + (b_1 - b_2) \in T,$$

dunque T è un sottogruppo di G. Inoltre T è abeliano, infatti:

$$(t_1 \circ t_2)(x) = t_1(x + b_2) = x + (b_1 + b_2) = t_2(x + b_1) = (t_2 \circ t_1)(x).$$