Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Esercizi - Foglio 1

Esercizio 1. Siano date le seguenti permutazioni in S_9:

$$\sigma = (15643)(3457)(8924)(167), \ \tau := (123)(24).$$

Determinare la decomposizione in cicli disgiunti e la parità di: $\sigma, \tau, \sigma \circ \tau, \tau \circ \sigma$.

Esercizio 2. Determinare il numero degli elementi di ordine 6 di S_n per $n = 4, 5, 6$.

Esercizio 3. Sia $n > 1$ un intero e sia dato il seguente insieme:

$$A_n := \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ pari } \}.$$

Dimostrare che A_n è un sottogruppo di S_n (detto *gruppo alterno su n elmenti*).

Esercizio 4. Si dimostri che il sottoinsieme $S := \{(12)(34), (13)(24), (14)(23), \mathrm{id}\}$ è un sottogruppo di S_4 (e di A_4).

Esercizio 5. Per $n = 4, 5, 6, 7, 8$ determinare tutti i sottogruppi di Z_n.

Esercizio 6. Siano n un intero positivo, $(G, \cdot)$ un gruppo e $S = \{g \in G : g^n = e_G\}$. È vero che se $S \neq \emptyset$, allora S è un sottogruppo di G? Che succede se si suppone G abeliano?

Esercizio 7. Si dimostri che $H := \{x + iy \in \mathbb{C} : 3x + 5y = 0\}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{C}, +)$.

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{R}$ generato dai vettori e_1, e_2 ed e_3. Si dimostri che il sottoinsieme $W := \{ae_1 + be_2 : a, b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo di V.

Esercizio 9. Sia $n > 1$ un intero e $GL_n(\mathbb{R})$ il gruppo generale lineare di dimensione n su $\mathbb{R}$, con l'operazione data dal prodotto righe per colonne. Dimostrare che i seguenti sono sottogruppi di $GL_n(\mathbb{R})$:

(a) $SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$, (gruppo speciale lineare).

(b) $T_n^+(\mathbb{R}) := \{A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ (matrici triangolari superiori).

(c) $D_n(\mathbb{R}) := \{A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\}$ (matrici diagonali).

Esercizio 10. Sia $G : \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ applicazione}\}$. Dimostrare che G è un gruppo rispetto alla somma puntuale:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x).$$

Dimostrare poi che:

(a) $\mathcal{C}(\mathbb{R}) := \{f \in G : f \text{ continua}\}$,

(b) $\mathcal{D}(\mathbb{R}) := \{f \in G : f \text{ derivabile}\}$,

(c) $\mathcal{I}(\mathbb{R}) := \{f \in G : f \text{ integrabile}\}$,

sono sottogruppi di G.

Esercizio 11. Sia G un gruppo e sia ρ la seguente relazione in G:

$$x \,\rho\, y \iff < x > = < y > .$$

Dimostrare che:

(a) ρ è una relazione di equivalenza.

(b) Per ogni $x \in G$, $x \,\rho\, x^{-1}$.

(c) Sia $G = \mathbb{Z}_{15}$, determinare $[\overline{2}]_\rho$, $[\overline{3}]_\rho$, $[\overline{4}]_\rho$, $[\overline{5}]_\rho$.