ESEMPI

1 Scoppiamento del piano proiettivo in un punto

Consideriamo il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ con coordinate omogenee $x = (x_0, x_1, x_2)$ e la retta proiettiva $\mathbb{P}^1$ con coordinate omogenee $y = (y_1, y_2)$. In $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ denotiamo un punto (x, y) anche con $(x_0, x_1, x_2; y_1, y_2)$. Consideriamo il sottoinsieme $\Pi \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ definito dall'equazione:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \tag{1}$$

E:equaz

L'applicazione

$$\sigma : \Pi \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

indotta dalla proiezione sul primo fattore si chiama *scoppiamento del piano* nel punto $\xi = (1, 0, 0)$.

Se $(x_0, x_1, x_2) \neq \xi$ allora $\sigma^{-1}((x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_1, x_2; x_1, x_2)$. Quindi σ è biunivoca al di sopra di $\mathbb{P}^2 \setminus \{\xi\}$. D'altra parte, se $(x_0, x_1, x_2) = \xi$ allora la (1) è soddisfatta da qualsiasi (y_1, y_2). In altre parole

$$\sigma^{-1}(\xi) = \{\xi\} \times \mathbb{P}^1$$

Per questo motivo il punto ξ è chiamato *centro dello scoppiamento.*

Per fornire un'idea più precisa di come agisce lo scoppiamento, consideriamo una retta L passante per ξ, diversa dalla retta $x_1 = 0$. La sua equazione è $x_2 = \alpha x_1$ per qualche α, e quindi L consiste dei punti $(1, x_1, \alpha x_1)$ al variare di x_1. Quindi $\sigma^{-1}(L \setminus \xi)$ consiste dei punti

$$(1, x_1, \alpha x_1; x_1, \alpha x_1) = (1, x_1, \alpha x_1; 1, \alpha)$$

al variare di $x_1 \neq 0$. Quando $x_1 = 0$ si ottiene il punto $(\xi; 1, \alpha)$. In altre parole, anche se σ^{-1} non è definita in ξ, lo è la sua restrizione ad una retta qualsiasi passante per ξ. Questo fatto si può esprimere dicendo che σ^{-1} separa le direzioni nel punto ξ.

2 Applicazioni razionali

Sia dato un sistema lineare di dimensione $r \geq 1$ di ipersuperfici di grado d di $\mathbb{P}^n$:

$$\Lambda = \Lambda(F_0, \ldots, F_r)$$

Ad esso possiamo associare una *applicazione razionale*

$$\varphi_\Lambda : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^r$$

mandando $p \mapsto (F_0(p), \dots, F_r(p))$. Quest'applicazione non è definita nell'insieme Z dei punti base di Λ. È possibile interpretare φ_Λ come un'applicazione razionale:

$$\varphi_\Lambda : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \Lambda^\vee$$

a valori nello spazio proiettivo duale di Λ, perché possiamo porre:

$$\varphi_\Lambda(p) = \{F \in \Lambda : F(p) = 0\}$$

In questo modo si ottiene una definizione di φ_Λ indipendente dalla scelta della base $\{F_0, \dots, F_r\}$ di Λ, e quindi più intrinseca.

Per ovviare all'indeterminatezza di φ_Λ nei punti base si può considerarne il grafico $\Gamma_{\varphi_\Lambda} \subset (\mathbb{P}^n \setminus Z) \times \Lambda^\vee$ e prenderne la chiusura:

$$\overline{\Gamma}_{\varphi_\Lambda} \subset \mathbb{P}^n \times \Lambda^\vee$$

Ora la proiezione $\mathbb{P}^n \times \Lambda^\vee \longrightarrow \Lambda^\vee$ induce un'applicazione

$$\overline{\Gamma}_{\varphi_\Lambda} \longrightarrow \Lambda^\vee$$

ben definita. Lo scoppiamento del piano è un caso particolare di questa costruzione, ottenuto prendendo come sistema lineare il fascio di rette $\Lambda(x_1, x_2)$.

3 Reti di curve piane

Una *rete* di curve piane è un sistema lineare $\Lambda = \Lambda(F_0, F_1, F_2)$ di dimensione 2 di curve piane. Sia d il grado delle curve della rete e sia Z l'insieme dei punti base. Definiamo la *curva jacobiana della rete* come il luogo $J(\Lambda) \subset \mathbb{P}^2$ dei punti singolari delle curve della rete. Una sua equazione è:

$$\begin{vmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Quindi $J(\Lambda)$ è una curva di grado $3(d-1)$.

$J(\Lambda)$ può anche descriversi come il luogo dei punti in cui due curve della rete hanno un contatto, cioè sono tangenti. Infatti, per un tale punto p passa un fascio di curve della rete, tutte tra loro tangenti. Esiste quindi una curva del fascio che è singolare in p (esercizio).

La chiusura dell'immagine $R := \overline{\varphi_\Lambda(J(\Lambda) \setminus Z)} \subset \Lambda^\vee$ è una curva che si dice la *curva di diramazione della rete.*

L:jac1 **Lemma 3.1** *La curva jacobiana contiene i punti base della rete ed è in essi singolare.*

Proof. Ci si riduce al caso affine, supponendo il punto base P nell'origine e considerando equazioni affini di tre curve della rete $f = g = h = 0$ passanti per P. L'equazione di $J(\Lambda)$ è, localmente in P:

$$\begin{vmatrix} f & g & h \\ f_x & g_x & h_x \\ f_y & g_y & h_y \end{vmatrix} = 0$$

Chiaramente questa curva passa per P. D'altra parte la sua derivata parziale rispetto a x è:

$$\begin{vmatrix} f_x & g_x & h_x \\ f_x & g_x & h_x \\ f_y & g_y & h_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ f_{xx} & g_{xx} & h_{xx} \\ f_y & g_y & h_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ f_x & g_x & h_x \\ f_{xy} & g_{xy} & h_{xy} \end{vmatrix}$$

e questa si annulla in P. Similmente per la derivata parziale rispetto a y. □

4 Reti di cubiche piane

Consideriamo il caso particolare di una rete di cubiche consistente delle cubiche che passano per 7 punti distinti $Z = \{P_1, \ldots, P_7\}$, a 3 a 3 non allineati, a 6 a 6 non su una conica.

L'applicazione razionale $\varphi_\Lambda : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \Lambda^\vee$ ha grado 2. Infatti se $p \in \mathbb{P}^2 \setminus Z$ il fascio di cubiche per $Z \cup \{p\}$ passa per un nono punto q e $\varphi_\Lambda(p) = \varphi_\Lambda(q)$. φ_Λ si chiama *l'involuzione di Geiser* definita da Λ.

La curva di diramazione R consiste dei punti la cui controimmagine è un solo punto. Il suo grado è uguale al suo numero di intersezioni con una retta. Ma una retta di $\Lambda^\vee$ proviene da una cubica $F \in \Lambda$ e quindi bisogna contare il numero di intersezioni di F con $J(\Lambda)$ al di fuori di Z. In questo caso $J(\Lambda)$ è una sestica, che ha 7 punti doppi in Z. Quindi il numero cercato è

$$3 \cdot 6 - 7 \cdot 2 = 4$$

cioè R è una quartica piana.

5 Reti di quadriche di $\mathbb{P}^3$

Consideriamo una rete $\Lambda = \Lambda(Q_0, Q_1, Q_2)$ di quadriche di $\mathbb{P}^3$. La supporremo sufficientemente generale da possedere $8 = 2^3$ punti base $Z = \{P_1, \ldots, P_8\}$ distinti.Questi 8 punti non sono generali, perché per 8 punti scelti in modo generale passano 10-8=2 quadriche linearmente dipendenti. Ciò significa che Z impone 7 condizioni indipendenti alle quadriche, cioè le quadriche passanti per 7 dei punti di Z passano anche per l'ottavo.

Supporremo che nella rete non vi siano quadriche di rango ≤ 2, cioè che tutte le quadriche singolari della rete siano coni con vertice ridotto a un punto.

Il luogo in Λ che parametrizza le quadriche singolari è una quartica. Una sua equazione si ottiene annullando il discriminante della quadrica variabile, in funzione dei parametri (λ, μ, ν) che parametrizzano la rete.Pertando a partire dalla rete Λ costruiamo una quartica piana.

Quindi abbiamo due modi per costruire quartiche piane: utilizzando una rete di cubiche piane oppure una rete di quadriche di $\mathbb{P}^3$.

6 Rappresentazione piana di una quadrica di $\mathbb{P}^3$

In $\mathbb{P}^2$, con coordinate omogeneee (X_0, X_1, X_2), si consideri il sistema lineare Λ delle coniche passanti per $P_0 = (1, 0, 0)$ e $P_1 = (0, 1, 0)$. Una base di Λ è:

$$\{X_0X_1, X_0X_2, X_1X_2, X_2^2\}$$

L'applicazione razionale definita da Λ:

$$\varphi_\Lambda : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$$

manda

$$(x_0, x_1, x_2) \longmapsto (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) = (x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2, x_2^2)$$

L'immagine di φ_Λ è la quadrica Q di equazione:

$$Y_0Y_3 - Y_1Y_2 = 0$$

Questa quadrica contiene due sistemi di rette. Le rette del primo sistema hanno equazioni:

$$\lambda Y_0 - \mu Y_1 = 0, \quad \mu Y_3 - \lambda Y_2 = 0$$

al variare di $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$. La rette del secondo sistema hanno equazioni:

$$\lambda Y_0 - \mu Y_2 = 0, \quad \mu Y_3 - \lambda Y_1 = 0$$

al variare di $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$. È immediato verificare che due rette dello stesso sistema sono sghembe, mentre due rette di sistemi diversi si incontrano.

Inoltre le controimmagini delle rette di ciascuno dei due sistemi sono le coniche di Λ che sono spezzate nella retta $X_2 = 0$ e in una retta di ciascuno dei due fasci di centro P_0 e P_1. La retta $X_2 = 0$ viene trasformata da φ_Λ nel punto $(1, 0, 0, 0)$.