Un Lemma sui rivestimenti

Lemma 0.1 *Sia*

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "q"] & X \end{tikzcd}$$

un diagramma commutativo di applicazioni continue tra spazi topologici connessi e localmente connessi. Se p e q sono rivestimenti allora anche g è un rivestimento.

Dim. Sia $y \in g(R)$, sia $x = q(y) \in X$ e sia U un intorno aperto connesso di x ben ricoperto sia da p che da q. Siano:

$$p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i, \quad q^{-1}(U) = \coprod_{j \in J} W_j \tag{1}$$

E:1

le decomposizioni in componenti connesse omeomorfe ad U delle controimmagini di U. Allora y appartiene ad uno ed uno solo dei W_j: sia esso W_0 e sia $\sigma_0 : U \longrightarrow W_0$ la corrispondente sezione locale di q.

Supponiamo che $y \in g(R)$ e sia

$$I_0 = \{i \in I : g^{-1}(y) \cap V_i \neq \emptyset\}$$

Allora $I_0 \neq \emptyset$ e

$$g^{-1}(W_0) = \coprod_{i \in I_0} V_i$$

Per ogni $i \in I_0$ si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & V_i \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "p"] \\ W_0 \arrow[r, shift left, "q"] & X \arrow[l, shift left, "\sigma_0"] \end{tikzcd}$$

in cui q, p, σ_0 sono omeomorfismi. Pertanto anche $g : V_i \longrightarrow W_0$ è un omeomorfismo, e ciò dimostra che W_0 è un intorno ben ricoperto di y.

Ci rimane da dimostrare che g è suriettiva. Dalla dimostrazione precedente segue in particolare che $g(R)$ è un aperto di Y. Pertanto, dato che Y è connesso, sarà sufficiente dimostrare che $g(R)$ è anche chiuso. Sia dunque $y \in \overline{g(R)}$ e sia U, come sopra, un intorno connesso di $x = q(y)$ ben ricoperto da p e da q, siano le (1) le decomposizioni in componenti connesse delle sue controimmagini e sia $y \in W_0$. Allora $W_0 \cap g(R) \neq \emptyset$ per l'ipotesi su y. Sia $z \in W_0 \cap g(R)$. Allora U è un intorno connesso di $g(z)$ e ripetendo l'argomento precedente si deduce che W_0 è un intorno aperto e connesso di z ben ricoperto da g. In particolare $y \in W_0 \subset g(Y)$. $\square$