Proposition 7. — *Le groupe fondamental du plan projectif est un groupe à deux éléments.*

Ceci résulte du théorème 2 et du diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Z} \arrow[dr] & \\ \mathbf{Z} \arrow[ur, "\times 2"] \arrow[dr] & & \mathbf{Z}/(2). \\ & \{0\} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

En notation multiplicative, $\pi(\mathbf{P}_2)$ est le quotient du groupe libre à un générateur α par le sous-groupe engendré par α^2.

La somme connexe de deux exemplaires de $\mathbf{P}_2$ est le *tore de Klein* $\mathbf{U}_2 = \mathbf{P}_2 \sharp \mathbf{P}_2$ qui est obtenu en recollant deux bandes de Mœbius le long de leurs bords homéomorphes au cercle. En appliquant le théorème 2, on démontre que $\pi(\mathbf{U}_2) = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}/(\alpha^2\beta^2)$ où α et β sont les deux générateurs. Posons plus généralement $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n \sharp \mathbf{P}_2$, on dit que $\mathbf{U}_n$ est la *surface non orientée de genre n* et l'on a, par récurrence :

Proposition 8. — *Le groupe fondamental de la surface* $\mathbf{U}_n$ *non orientée de genre n est le quotient du groupe libre à n générateurs* $\alpha, \beta, \ldots \nu$ *par le sous-groupe distingué engendré par* $\alpha^2\beta^2 \ldots \nu^2$.

Remarque 8. — On peut démontrer que $\mathbf{T}_1 \sharp \mathbf{P}_2$ est homéomorphe à $\mathbf{U}_2 \sharp \mathbf{P}_2$, d'où, par récurrence, que $\mathbf{U}_{2n+1}$ est homéomorphe à $\mathbf{T}_n \sharp \mathbf{P}_2$ et $\mathbf{U}_{2n+2}$ à $\mathbf{T}_n \sharp \mathbf{U}_2$ (cf. chap. V).

Chapitre III

FONCTIONS DÉRIVABLES ET VARIÉTÉS

Il est nécessaire d'indiquer la définition et quelques propriétés des fonctions dérivables pour étudier une classe particulièrement intéressante d'espaces métriques : les variétés différentiables. Plus précisément une variété différentiable est un sous-espace d'un espace euclidien $\mathbf{R}^n$ suffisamment « bon » pour qu'on puisse parler de fonction dérivable sur la variété [1]. On s'intéresse surtout, ici, aux variétés de dimension 2 ou surfaces. Le lecteur peut trouver les démonstrations des résultats indiqués dans ce chapitre et des développements complémentaires dans J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne* (Gauthier-Villars, 1968) et H. Cartan, *Calcul différentiel* et *Formes différentielles* (Hermann, 1967).

1. APPLICATIONS DÉRIVABLES

Définition. — Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et f une application continue de U dans $\mathbf{R}^q$. On dit que f est une *applica-*

[1] On peut donner une définition intrinsèque d'une structure de variété différentiable sur un espace métrique sans supposer que c'est une partie de $\mathbf{R}^n$ (voir N. Bourbaki, *Variétés différentielles et analytiques (Résultats)*, § 5) ; mais on peut démontrer que cette définition n'est pas plus générale que celle que nous donnons.

tion dérivable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $Df(a) : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ telle que :

$$\frac{\| f(x) - f(a) - Df(a).(x-a) \|}{\| x - a \|} \to 0$$

quand $x \to a$ $(x \neq a)$.

L'application linéaire $Df(a) \in L(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$, unique, si si elle existe, à posséder cette propriété est l'*application linéaire tangente* à f en a. Le rang de l'application linéaire $Df(a)$ (dimension de l'image) s'appelle le *rang* de f en a.

Une application linéaire $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est définie par le nombre $\varphi(1)$. La dérivée usuelle $f'(a)$ de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est précisément égale à $Df(a).1$. Si $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ est une application linéaire, elle est dérivable et, pour tout $a \in \mathbf{R}^p$, on a $Df(a) = f \in L(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$.

Application de classe C^r. — Si f est dérivable en tout point $a \in U$, l'application $Df : U \to L(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$ qui, à $x \in U$, associe $Df(x)$ est l'*application dérivée* de f. Si Df est continue, on dit que f est de classe C^1, ou continûment dérivable. Si Df est dérivable, sa dérivée $D(Df)(a) \in L(\mathbf{R}^p, L(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q))$ définit une application bilinéaire $D^2 f(a) : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$. Si Df est de classe C^1, on dit que f est de classe C^2 et (théorème de Schwarz) $D^2 f(a)$ est bilinéaire symétrique. Plus généralement, on dit, par récurrence, que f est de classe C^r si sa dérivée Df est de classe C^{r-1}; on dit que f est de classe C^∞ si toutes ses dérivées successives $D^r f$ sont continûment dérivables.

Dérivée d'une fonction composée. — Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^p$, V un ouvert de $\mathbf{R}^q$ et $f : U \to \mathbf{R}^q$, $g : V \to \mathbf{R}^n$ des applications. Si f est dérivable en $a \in U$ et g en $f(a) \in V$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et sa dérivée est $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a) : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$.

Dérivées partielles. — La donnée d'une application $f : U \to \mathbf{R}^q$ est équivalente à la donnée de q fonctions

$f_1, \ldots, f_q$ de p variables $x_1, \ldots, x_p$. La dérivée partielle $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ au point $a = (a_1, \ldots, a_p)$ est la dérivée en $a_j \in \mathbf{R}$ de l'application composée :

$$x_j \mapsto (a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_p) \mapsto f_i(a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_p).$$

D'après ce qui précède, si f est dérivable en a, elle possède des dérivées partielles et la matrice représentant $Df \in L(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q)$ sur les bases canoniques est la *matrice jacobienne :*

$$J(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}.$$

La réciproque est fausse; cependant, pour que f soit de classe C^1 dans U, il faut et il suffit qu'elle admette dans U des dérivées partielles continues.

2. THÉORÈME DE L'INVERSION LOCALE

Soit $f : U \to \mathbf{R}^q$ une application de classe C^r; supposons que f soit une bijection de U sur un ouvert $V = f(U)$ et que son inverse f^{-1} soit dérivable. On dit alors que f est un C^r-*difféomorphisme* de U sur V; on a nécessairement $p = q$, $Df^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1}$ et f^{-1} est de classe C^r.

THÉORÈME 1 (inversion locale). — *Soit* $f : U \to \mathbf{R}^p$ *une application de classe* C^r; *si en un point* $a \in U$ *l'application tangente est de rang* p (application linéaire inversible), *il existe un voisinage ouvert* A *de* a *tel que la restriction* $f \mid A$ *soit un* C^r*-difféomorphisme de* A *sur* $f(A)$.

Ainsi la dérivée d'une application dérivable rend compte des propriétés locales de celle-ci.

Corollaire (fonctions implicites). — *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ *et* $f : U \to \mathbf{R}^q$ *une application de classe* C^r. *Si au point* $(a, b) \in U$ *la dérivée partielle* $D_2 f(a, b) : \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q$ *est de rang* q, *il existe un voisinage* V *de* (a, b), *un voisinage* W *de* a *dans* $\mathbf{R}^p$ *et une application* $g : W \to \mathbf{R}^q$ *de classe* C^r *telle que les conditions suivantes soient équivalentes :*

i) $(x, y) \in V$ *et* $f(x, y) = f(a, b)$,
ii) $x \in W$ *et* $y = g(x)$.

En outre l'application $h : V \to \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ *définie par* $h(x, y) = (x, f(x, y))$ *est un* C^r*-difféomorphisme de* V *sur* $h(V)$.

La dérivée partielle $D_2 f(a, b)$ est la dérivée de l'application $y \mapsto f(a, y)$ au point $y = b \in \mathbf{R}^q$. La deuxième assertion du corollaire résulte du théorème 1 car la dérivée $Dh(a, b) : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ s'exprime en matrice par blocs :

$$Dh(a, b) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathbf{R}^p) & 0 \\ D_1 f(a, b) & D_2 f(a, b) \end{pmatrix}.$$

C'est donc une application de rang $p + q$, et h est localement inversible. Son inverse s'écrit $h^{-1}(x, z) = (x, g(x, z))$ et il est facile de montrer que g convient pour la première assertion du corollaire.

3. VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Définition. — Une partie M de $\mathbf{R}^n$ est une *variété différentiable* de dimension p, de classe C^r, si elle possède la propriété locale suivante :

(P) *pour tout point* $a \in M$, *il existe un ouvert* U *de* $\mathbf{R}^p$, *un voisinage* W *de* a *dans* $\mathbf{R}^n$ *et une application* $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ *de classe* C^r, *de rang* p, *homéomorphisme de* U *sur* $W \cap M$.

On dit que φ est une *paramétrisation* de M au voisinage de a. Quitte à faire une translation sur U, on peut supposer que $\varphi(0) = a$; on a alors une paramétrisation centrée en a.

La propriété (P) est équivalente à la suivante :

(P') *pour tout point* $a \in M$, *il existe un ouvert* X *de* $\mathbf{R}^n$ *et un* C^r*-difféomorphisme* ψ *de* X *sur un voisinage* W *de* a *dans* $\mathbf{R}^n$ *tel que* $\psi(X \cap \mathbf{R}^p) = W \cap M$, *où* $\mathbf{R}^p$ *est le sous-espace* $(y_{p+1} = \dots = y_n = 0)$ *de* $\mathbf{R}^n$.

Il est clair que (P') entraîne (P) si l'on pose $U = X \cap \mathbf{R}^p$ et $\varphi = \psi \mid U$. La réciproque se déduit du lemme suivant :

Lemme. — *Si* $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ *est une paramétrisation de* M *centrée en* a, *il existe un voisinage* X *de* 0 *dans* $\mathbf{R}^n$ *et un* C^r*-difféomorphisme* ψ *de* X *sur un voisinage* W' *de* a *dans* $\mathbf{R}^n$ *tels que* $X \cap \mathbf{R}^p = U'$ *soit contenu dans* U, *que* $\psi(U') = W' \cap M$ *et que* $\psi \mid U' = \varphi \mid U'$ *soit une paramétrisation de* M *centrée en* a.

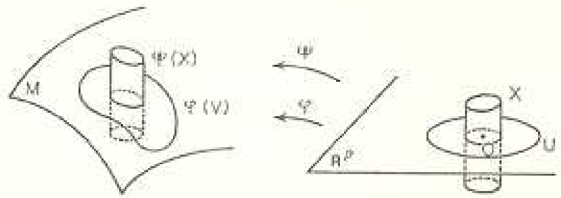
L'application φ est de rang p en 0 et l'on peut supposer, après permutation des coordonnées x_i de $\mathbf{R}^n$ que le déterminant de la matrice $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant p$ est non nul. L'application $\psi : U \times \mathbf{R}^{n-p} \to \mathbf{R}^n$ définie par :

$$\psi_i(y_1, \dots, y_n) = \varphi_i(y_1, \dots, y_p) \qquad 1 \leqslant i \leqslant p,$$
$$\psi_{p+k}(y_1, \dots, y_n) = y_{p+k} + \varphi_{p+k}(y_1, \dots, y_p), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-p,$$

est de rang n en 0 car sa matrice jacobienne s'écrit :

$$J(\psi) = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} & \dfrac{\partial \varphi_{p+k}}{\partial y_j} \\ \hline 0 & \mathrm{id} \end{array}\right).$$

On prend pour X un voisinage de $0 \in \mathbf{R}^n$ assez petit pour que $\psi | X$ soit un difféomorphisme de X sur un voisinage W′ de a contenu dans W.



Remarque 1. — Comme ψ est injective, il résulte du lemme qu'à condition de remplacer U par un voisinage de 0 plus petit, on peut supposer que la paramétrisation φ est injective. L'application φ^{-1} s'appelle un *système de coordonnées locales* au voisinage de a ou une *carte* centrée en a.

Remarque 2. — Une variété différentiable de dimension p est une variété de dimension p au sens de la note 1 de la page 8 puisqu'une paramétrisation est un homéomorphisme.

Exemple 1. — Une variété de dimension 1 est une *courbe* dans $\mathbf{R}^n$, une variété de dimension 2 une *surface*.

Exemple 2. — On vérifie que la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

est une variété de dimension 2 dans $\mathbf{R}^3$. De même le tore d'équations paramétriques :

$$x = (3 + \cos \varphi) \cos \theta,$$
$$y = (3 + \cos \varphi) \sin \theta,$$
$$z = \sin \varphi.$$

Changement de paramétrisation. — Si $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ est une paramétrisation de M au voisinage de a, U′ un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et $\theta : U' \to U$ un C^r-difféomorphisme, l'application $\varphi \circ \theta : U' \to \mathbf{R}^n$ est une paramétrisation de M au voisinage de a. Inversement, soit $\varphi' : U' \to \mathbf{R}^n$ une paramétrisation de M, montrons que $\varphi^{-1} \circ \varphi' = \theta$ est un C^r-difféomorphisme de U′ sur U (on suppose φ et φ' injectives). L'application $\theta : U' \to U$ est bijective; il suffit de montrer qu'elle est de rang p en tout point $y \in U'$. On peut supposer que φ est centrée en $\varphi'(y)$; soit alors $\psi : X \to \mathbf{R}^n$ associée à φ comme dans le lemme, et soit V un voisinage de y dans U′ tel que $\varphi'(V) \subset \psi(X)$. L'application $\psi^{-1} \circ \varphi' : V \to \mathbf{R}^n$ est de rang p puisque ψ est un difféomorphisme et son image est contenue dans $\mathbf{R}^p$; elle coïncide avec $\varphi^{-1} \circ \varphi$ qui est donc de rang p. Ainsi, tout changement de paramétrisation provient d'un C^r-difféomorphisme de la source.

Application dérivable de variété dans variété. — Soit $f : M \to M'$ une application continue. On dit que f est dérivable en $a \in M$ si, pour une paramétrisation φ de M centrée en a, l'application $f \circ \varphi : U \to M' \subset \mathbf{R}^{n'}$ est dérivable en 0. Ceci ne dépend pas du choix de φ (voir ci-dessus). On dit que f est dérivable si elle est dérivable en tout point de M. Le rang de f en a est le rang, indépendant de φ, de $f \circ \varphi$ en 0. Si f est bijective et si f^{-1} est dérivable, on dit que f est un difféomorphisme. Il est équivalent de dire que f est bijective et de rang égal à la dimension de M. En particulier, si $\varphi : U \to M$ est un paramétrage, $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ est un difféomorphisme.

Plan tangent (cas des surfaces). — Soit $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ un paramétrage de M centré en a. L'image de l'application linéaire affine de rang deux $a + D\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^n$ est un plan passant par a qu'on appelle le *plan tangent* $T_a(M)$.

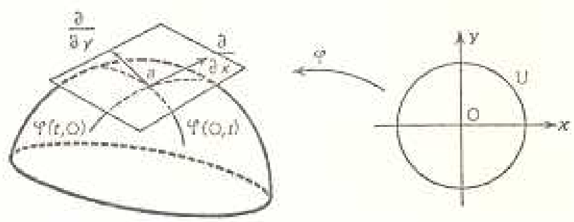
Il est indépendant du paramétrage φ. Tout autre paramétrage s'écrit $\varphi\circ\theta$ où θ est un difféomorphisme, et l'image de $D(\varphi\circ\theta) = D\varphi\circ D\theta$ est celle de $D\varphi$. Soit $x = x(t)$, $y = y(t)$ une courbe dérivable dans $\mathbf{R}^2$, passant par 0 pour $t = 0$. Le vecteur tangent en a à la courbe $\varphi(x(t), y(t))$ tracée sur la surface M est le vecteur d'origine a et d'extrémité $a + D\varphi(x'(0), y'(0))$; il est dans le plan tangent $T_a(M)$. Notons $\frac{\partial}{\partial x}$ le vecteur tangent à $\varphi(t, 0)$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ le vecteur tangent à $\varphi(0, t)$; ces vecteurs engendrent $T_a(M)$ et un vecteur tangent A s'écrit de façon unique $\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}$; c'est le vecteur vitesse de $\varphi(\alpha t, \beta t)$. Si $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ est un changement de coordonnées locales de dérivée $D\theta = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}$ on a :

$$\frac{\partial}{\partial u} = x'_u \frac{\partial}{\partial x} + y'_u \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = x'_v \frac{\partial}{\partial x} + y'_v \frac{\partial}{\partial y},$$

d'où : $$A = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} = \alpha'\frac{\partial}{\partial u} + \beta'\frac{\partial}{\partial v}$$

avec $(\alpha, \beta) = D\theta(\alpha', \beta')$.



Application tangente. — Soit $f : M \to M'$ une application différentiable et φ un paramétrage de M au voisinage de a. L'application qui au vecteur tangent $A = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}$ associe le vecteur d'origine $b = f(a)$, d'extrémité $b + D(f\circ\varphi)(\alpha, \beta)$ est une application du plan $T_a(M)$ dans le plan $T_b(M')$. Elle ne dépend pas du paramétrage choisi car :

$$D(f\circ\varphi\circ\theta)(\alpha', \beta') = D(f\circ\varphi)\circ D(\theta)(\alpha', \beta') = D(f\circ\varphi)(\alpha, \beta).$$

Cette application, notée Df, s'appelle l'*application tangente* à f en a.

4. VALEURS RÉGULIÈRES D'UNE FONCTION DÉRIVABLE

Soit $f : M \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur une variété de dimension p. Un point $a \in M$ est un *point critique* de f si $Df(a) : T_a(M) \to \mathbf{R}$ est nulle. On dit que $f(a)$ est une *valeur critique* de f. Une *valeur régulière* est un nombre qui n'est pas valeur critique (pour aucun point critique $a \in M$).

Proposition 1. — *Si y est une valeur régulière de $f : M \to \mathbf{R}$, alors $f^{-1}(y) = N$ est une variété de dimension $p - 1$.*

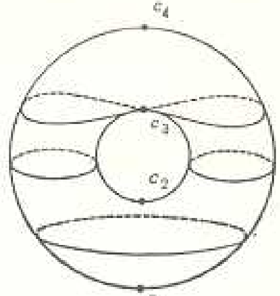
Pour la démonstration, on suppose que M est une surface [1]. Supposons que N n'est pas vide et soit $a \in N$. Si l'on trouve un voisinage V de a dans M et un système de coordonnées locales $\psi^{-1}(x) = (f(x), v(x))$ dans V, l'une d'elles étant la fonction f, alors N est une variété (une courbe); elle est paramétrée par $\psi(y, v)$, puisque N est l'ensemble des points x tels que $f(x) = y$.

(1) La proposition 1 est néanmoins valable pour toute dimension p.

Soit $\varphi(u, v)$ une paramétrisation de M centrée en a. Comme $Df(a) \neq 0$, on peut supposer, quitte à intervertir u et v, que $Df.\frac{\partial}{\partial u} = \frac{d}{du}(f \circ \varphi(u, 0))$ n'est pas nul pour $u = 0$. Il résulte alors du corollaire du théorème 1 que $\theta(u, v) = (f \circ \varphi(u, v), v)$ est de rang 2 en 0 et que $(f(x), v(x)) = \theta \circ \varphi^{-1}(x)$ est un système de coordonnées locales sur M au voisinage de a.

Exemple 3. — La valeur 0 est régulière pour une fonction $f(x, y, z)$ sur $\mathbf{R}^3$ si $f(x, y, z) = 0$ entraîne qu'au moins une des dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z n'est pas nulle. L'équation $f(x, y, z) = 0$ définit alors une surface (cf. exemple 2).

Exemple 4. — Sur une surface M dans $\mathbf{R}^3$, la projection sur l'axe Oz définit la fonction cote z. Sa dérivée Dz est la projection du plan tangent. Elle s'annule aux points critiques : ce sont les points à plan tangent horizontal.



La figure ci-dessus montre un tore d'axe Ox et quatre points critiques de la fonction cote. Les valeurs critiques sont les cotes des sections horizontales qui ne sont pas des courbes.

5. POINTS CRITIQUES

Soient M une surface, $f : \mathrm{M} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^r $(r \geqslant 3)$ et $c \in \mathrm{M}$ un point critique de f, c'est-à-dire que $Df(c) = 0$. Soit $\varphi(x, y)$ un paramétrage de M centré en a; la fonction $g(x, y) = f(\varphi(x, y))$ a un point critique en 0. La dérivée seconde en 0 de g est un élément $D(D(g))(0)$ de $L(\mathbf{R}^2, L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}))$ auquel est associée canoniquement une application bilinéaire symétrique $D^2 g \in \mathrm{Bil}(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Elle est représentée par la *matrice hessienne* :

$$\mathrm{H}(g) = \begin{pmatrix} g''_{x^2} & g''_{xy} \\ g''_{yx} & g''_{y^2} \end{pmatrix}.$$

Soit θ un changement de paramétrage $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Après le changement de paramétrage θ, on a :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(g(\theta(u, v))) = g'_x x'_u + g'_y y'_u,$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = g''_{x^2}(x'_u)^2 + 2g''_{xy}x'_u y'_u + g''_{y^2}(y'_u)^2 + g'_x x''_{u^2} + g'_y y''_{u^2},$$

et de même pour les autres dérivées secondes, d'où, pour l'application bilinéaire :

$$D^2 h(A'', B'') = D^2 g(D\theta.A'', D\theta.B'') + Dg.D^2\theta(A'', B''),$$

avec A'' et $B'' \in \mathbf{R}^2$.

Lorsque le point 0 est critique pour g, on a $Dg = 0$ d'où :

$$(1) \qquad D^2 h(A'', B'') = D^2 g(D\theta.A'', D\theta.B'')$$

soit :

$$\mathrm{H}(h) = {}^t\mathrm{J}(\theta).\mathrm{H}(g).\mathrm{J}(\theta).$$

Dans ce cas, on définit une forme bilinéaire symétrique sur le plan tangent $T_c(\mathrm{M})$ en posant :

$$D^2 f(A, B) = D^2 g(A', B')$$

si $A = D\varphi(A')$ et $B = D\varphi(B')$. D'après (1), ceci ne dépend pas du choix du paramétrage.

Remarque 3. — Il est essentiel que le point c soit critique, afin que dans la formule (1) n'intervienne que la dérivée première du changement de paramétrage θ. En général, on ne peut pas parler de dérivée seconde sur une variété sans préciser les coordonnées locales, tandis que la dérivée première (§ 3) est toujours définie.

Les caractéristiques de la forme bilinéaire $D^2 f$ en un point critique c, et de la forme quadratique associée sont indépendantes du paramétrage. On dit que le point critique est *non-dégénéré* si $D^2 f$ est non-dégénérée, c'est-à-dire si le déterminant hessien n'est pas nul. L'*indice* du point critique non-dégénéré c est l'indice de la forme quadratique associée à $D^2 f$: c'est la dimension du plus grand sous-espace où la forme quadratique est définie négative. L'indice est 0, 1 ou 2 suivant que $D^2 f$ est positive, hyperbolique, ou négative.

THÉORÈME 2 (Morse 1932) [1]. — *Soit c un point critique non-dégénéré de $f : M \to R$, de classe C^r $(r \geqslant 3)$. Il existe un paramétrage φ par des coordonnées locales (X, Y) d'un voisinage $\varphi(U)$ de c tel que :*

$$f(\varphi(X, Y)) = f(c) + \begin{cases} X^2 + Y^2 & \text{si l'indice est } 0 \\ X^2 - Y^2 & \text{si l'indice est } 1 \\ -X^2 - Y^2 & \text{si l'indice est } 2. \end{cases}$$

Soit ψ un paramétrage de M centré en c par des coordonnées locales (x, y) et soit $g(x, y) = f(\psi(x, y))$. Il suffit de montrer :

LEMME. — *Soit $g : U \to R$ une fonction de classe C^r $(r \geqslant 3)$ définie dans un voisinage U de 0 dans R^2, pour laquelle 0 est un*

[1] Il y a un analogue de ce théorème pour les fonctions sur une variété de dimension p quelconque.

point critique non-dégénéré d'indice i. Il existe un difféomorphisme $(x, y) = \theta(X, Y)$ d'un voisinage V de 0 dans R^2 sur un voisinage $\theta(V)$ de 0 dans U tel que :

$$g(\theta(X, Y)) = g(0) + \begin{cases} X^2 + Y^2 & \text{si } i = 0 \\ X^2 - Y^2 & \text{si } i = 1 \\ -X^2 - Y^2 & \text{si } i = 2. \end{cases}$$

Avec les notations classiques $\frac{1}{2} g''_{x^2}(0) = r$, $\frac{1}{2} g''_{xy}(0) = s$, $\frac{1}{2} g''_{y^2}(0) = t$, le point 0 est non dégénéré si $rt - s^2 \neq 0$. La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$g(x, y) - g(0) = R(x, y)\, x^2 + 2S(x, y)\, x_y + T(x, y)\, y^2$$

où :

$$R(x, y) = \int_0^1 (1 - t)\, g''_{x^2}(tx)\, dt, \quad R(0) = r,$$

$$S(x, y) = \int_0^1 (1 - t)\, g''_{xy}(tx)\, dt, \quad S(0) = s,$$

$$T(x, y) = \int_0^1 (1 - t)\, g''_{y^2}(tx)\, dt, \quad T(0) = t.$$

1er cas : $rt - s^2 > 0$, r et $t > 0$. Au voisinage de 0, on a R et $T > 0$, et :

$$g(x, y) - g(0) = R(x, y)\left(x + y\frac{S(x, y)}{R(x, y)}\right)^2 + y^2\,\frac{R(x, y)\, T(x, y) - S(x, y)^2}{R(x, y)}.$$

Posons :

$$\begin{cases} X = \sqrt{R}\left(x + y\dfrac{S}{R}\right), \\ Y = y\sqrt{\dfrac{RT - S^2}{R}}, \end{cases}$$

on a $g(x, y) - g(0) = X^2 + Y^2$; l'indice du point critique est 0. Le couple (X, Y) est un système de coordonnées locales si la matrice jacobienne $\dfrac{D(X, Y)}{D(x, y)}$ est de rang 2 à l'origine. Or on a, à l'origine :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \sqrt{r}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \sqrt{\frac{rt - s^2}{r}}$$

et le déterminant jacobien est $\sqrt{rt - s^2} \neq 0$.

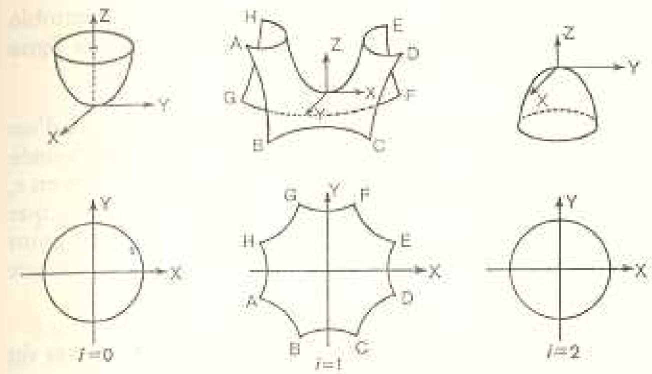
2e cas : $rt - s^2 > 0$, r et $t < 0$. On se ramène au premier cas en considérant $-g$. D'où $g(x, y) - g(0) = -X^2 - Y^2$; l'indice du point critique est 2.

3e cas : $rt - s^2 < 0$. On raisonne comme au premier cas si r ou t n'est pas nul. Sinon, on se ramène à cette hypothèse par un changement linéaire de coordonnées. On trouve alors $g(x, y) - g(0) = X^2 - Y^2$; l'indice du point critique est 1.

Etude des modèles. — D'après le théorème 2, il existe au voisinage d'un point critique non dégénéré c des coordonnées locales (X, Y) avec lesquelles f s'exprime comme la somme d'une constante et d'une forme quadratique. Les fonctions modèles sont :

$$g_0(X, Y) = X^2 + Y^2,$$
$$g_1(X, Y) = X^2 - Y^2,$$
$$g_2(X, Y) = -X^2 - Y^2.$$

Les surfaces représentatives des fonctions $Z = g_i(X, Y)$, $i = 0, 1, 2$, sont respectivement un paraboloïde de révolution d'axe OZ, un paraboloïde hyperbolique équilatère de direction principale $Z = 0$, et un paraboloïde de révolution d'axe OZ.



Un voisinage modèle pour la fonction g_i, c'est un voisinage U(s), $s > 0$, de 0 dans $\mathbf{R}^2$ défini comme suit :

$i = 0$: U(s) est le disque de rayon $\sqrt{s}$; c'est l'ensemble des points où $g_0(X, Y) \leqslant s$. Il est limité par la ligne de niveau $g_0(X, Y) = s$.

$i = 1$: les lignes de niveau de g_1 sont les hyperboles $X^2 - Y^2 = c^{te}$, leurs trajectoires orthogonales les hyperboles $XY = c^{te}$. Le voisinage U(s) est l'ensemble des points où $|X^2 - Y^2| \leqslant s$ et $|XY| \leqslant s$. Il est limité par les arcs suivants :

BC et FG de l'hyperbole $X^2 - Y^2 = -s$ (ligne de niveau inférieure),

AH et DE de l'hyperbole $X^2 - Y^2 = s$ (ligne de niveau supérieure),

AB et EF de l'hyperbole $XY = s$,

CD et GH de l'hyperbole $XY = -s$.

Il est clairement homéomorphe à un octogone.

$i = 2$: $U(s)$ est le disque de rayon $\sqrt{s}$; c'est l'ensemble des points où $g_2(X, Y) \geqslant -s$. Il est limité par la ligne de niveau $g_2(X, Y) = -s$.

Voisinage canonique. — Un voisinage canonique U d'un point critique non dégénéré c de $f : M \to \mathbf{R}$ est la donnée d'une paramétrisation $\varphi : U(s) \to M$ de M centrée en c, d'image notée U par abus de langage, et telle que $f(\varphi(X, Y)) = f(c) + g_i(X, Y)$ si i est l'indice du point critique c. Le théorème 2 assure l'existence de voisinages canoniques.

Corollaire. — *Les points critiques non dégénérés sont des points critiques isolés.*

On vérifie pour $i = 0, 1, 2$ que 0 est le seul point critique de la fonction g_i. Il en résulte que c est le seul point critique de f dans un voisinage canonique U de c.

Chapitre IV

FONCTIONS DE MORSE SUR LES SURFACES

La donnée sur une surface compacte M d'une fonction de Morse (définie ci-dessous) nous permettra au chapitre suivant de reconstituer la structure topologique globale de l'espace M, c'est-à-dire de déterminer M à homéomorphisme près. Le présent chapitre est consacré à l'étude du comportement d'une fonction de Morse au voisinage des points réguliers et des points critiques. On pourrait développer cette théorie pour les variétés de dimension p quelconque ; on se bornera au cas des surfaces. Dans tout le chapitre, on désigne par M une surface compacte.

1. FONCTION DE MORSE SUR UNE SURFACE COMPACTE

Soit $f : M \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^r $(r \geqslant 3)$ dont tous les points critiques sont non-dégénérés. Il résulte du corollaire du théorème 2 (chap. III, § 5) qu'une telle fonction a un nombre fini de points critiques. En effet, comme M est compacte, s'il y avait une infinité de points critiques, il y aurait un point $x \in M$ qui serait point d'accumulation de points critiques. En un tel point, $Df(x) = 0$ car Df est continue et le point x serait critique, ce qui est impossible car il résulte de l'hypothèse sur f que les points critiques sont isolés.

Une *fonction de Morse* $f : M \to \mathbf{R}$ est une fonction dont tous les points critiques sont non-dégénérés et les valeurs critiques correspondantes (en nombre fini) toutes distinctes. Nous admettrons le théorème suivant [1] :

THÉORÈME 1. — *Soit* M *une surface compacte et* $g : M \to \mathbf{R}$ *une fonction continue. Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction* [2] *de Morse* $f : M \to \mathbf{R}$ *telle que* $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$.

C'est le premier théorème global que nous rencontrions : le chapitre III ne concerne que des propriétés locales des variétés. Ce théorème est, pour les surfaces, une propriété globale assez forte pour qu'on puisse en déduire la classification de toutes les surfaces compactes.

2. CHAMP DE VECTEURS ET GROUPE A UN PARAMÈTRE DE DIFFÉOMORPHISMES

Un *groupe à un paramètre de difféomorphismes* de classe C^r d'une variété M est une application $\varphi : \mathbf{R} \times M \to M$, notée $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$, telle que :

i) pour tout t, l'application $\varphi_t : M \to M$ est un C^r-difféomorphisme,

ii) pour tous s et t, on a $\varphi_{s+t} = \varphi_t \circ \varphi_s$, en particulier $\varphi_0 = \mathrm{id}(M)$.

Pour $x \in M$, le vecteur vitesse au point $t = 0$ du chemin différentiable $t \mapsto \varphi_t(x)$ est un vecteur :

$$X(x) = \left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)\right]_{t=0},$$

tangent à M au point x. Ses coordonnées locales sont fonctions de classe C^{r-1} de x. Une telle donnée, pour

(1) On en trouve une démonstration « élémentaire » dans J. MILNOR, *Morse theory*, notes by M. SPIVACK et R. WELLS, Princeton University Press, 1963.

(2) Dans la suite, si l'on ne précise pas la classe d'une fonction dérivable, c'est qu'elle est de classe C^∞.

tout $x \in M$, d'un vecteur tangent en x à M, fonction de classe C^{r-1} de X est un *champ de vecteurs tangents* à M, de classe C^{r-1}. Dans le cas qui nous intéresse, on dit que le champ $X(x)$ engendre le groupe à un paramètre φ. Remarquons que $X(\varphi_t(x)) = \left[\frac{\partial}{\partial u}\varphi_u(x)\right]_{t=u}$

car, si $u = t + h$, $\frac{\partial}{\partial u}\varphi_u(x) = \frac{\partial}{\partial h}\varphi_{t+h}(x) = \frac{\partial}{\partial h}\varphi_h(\varphi_t(x))$, d'après *ii)*.

THÉORÈME 2. — *Soit* M *une surface compacte et* X *un champ de vecteurs tangents à* M, *de classe* C^r. *Il existe un unique groupe à un paramètre de difféomorphismes de* M, *de classe* C^r, *engendré par* X.

Cherchons d'abord pour chaque $x \in M$ une courbe paramétrée sur M, de la forme $y = \varphi_t(x)$, telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\varphi_t(x)) = X(\varphi_t(x)), & (1) \\ \varphi_0(x) = x. & (2) \end{cases}$$

Avec des coordonnées locales (x_1, x_2) sur M, pour lesquelles $X(x) = X_1(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$, on cherche deux fonctions $y_1(t), y_2(t)$ solutions du système :

$$\frac{dy_1}{dt} = X_1(y_1, y_2), \qquad \frac{dy_2}{dt} = X_2(y_1, y_2)$$

satisfaisant à $y_1(0) = x_1$ et $y_2(0) = x_2$. Pour un tel système, on a un théorème d'existence et d'unicité locale des solutions :

THÉORÈME 3. — *Pour tout point* $x_0 \in M$, *il existe un voisinage* U *de* x_0 *dans* M *et un nombre* $\varepsilon > 0$ *tel que l'équation* (1, 2) *ait une solution unique* $y = \varphi_t(x)$ *définie pour* $|t| < \varepsilon$, *quel que soit* $x \in U$, *et dépendant de classe* C^r *de* (x, t).

Prenons un recouvrement fini du compact M par des ouverts U donnés par le théorème 3, et soit η le plus petit des ε correspondants. On a donc une application $\varphi :]-\eta, \eta[\times M \to M$ de classe C^r définie par $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$.

Si $|t|$, $|s|$ et $|s+t| < \eta$, on a $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$. En effet, supposant s constant, $\varphi_{t+s}(x)$ et $\varphi_t(\varphi_s(x))$ sont des solutions de (1) qui, pour $t = 0$, valent $\varphi_s(x)$. Elles sont égales d'après le théorème 3. Du fait que $\varphi_0(x) = x$, il résulte que $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \mathrm{id}(M)$ et que φ_t est un difféomorphisme. On a un « noyau de groupe à un paramètre ». Il reste à l'étendre à toutes les valeurs de $t \in \mathbf{R}$. Pour cela, on pose :

$$\varphi_{nt} = \varphi_t \circ \varphi_t \circ \ldots \circ \varphi_t \quad (n \text{ fois})$$

et l'on vérifie sans peine qu'on a défini un groupe à un paramètre.

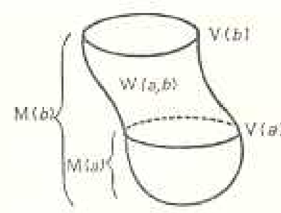
3. VALEURS RÉGULIÈRES D'UNE FONCTION DE MORSE

Soit $f : M \to \mathbf{R}$ une fonction de Morse. Si a est une valeur régulière (non critique), on note $V(a)$ la courbe (chap. III, § 4, proposition 1) $f^{-1}(a)$, courbe de niveau a de la fonction f, et on note $M(a) = f^{-1}(]-\infty, a])$ l'ensemble des points de M tels que $f(x) \leqslant a$. L'intérieur de $M(a)$ est l'ensemble des points où $f(x) < a$; sa frontière est $V(a)$. Si $b > a$ est une autre valeur régulière, on note $W(a, b)$ le compact $M(b) - \mathrm{int}\,(M(a)) = f^{-1}([a, b])$.

Proposition 1. — *Supposons que la fonction de Morse $f : M \to \mathbf{R}$ n'ait pas de valeur critique comprise entre a et b, alors $V(a)$ est difféomorphe à $V(b)$, $M(a)$ est difféomorphe à $M(b)$ et $W(a, b)$ est difféomorphe à $V(a) \times [a, b]$.*

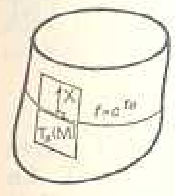
Pour donner un sens aux deux dernières assertions, il faudrait élargir la notion d'application dérivable et de variété aux *variétés à bord*. Nous nous contenterons de

trouver un homéomorphisme de $M(a)$ sur $M(b)$ qui induise un difféomorphisme des intérieurs et un difféomorphisme des frontières (qui sont des courbes).



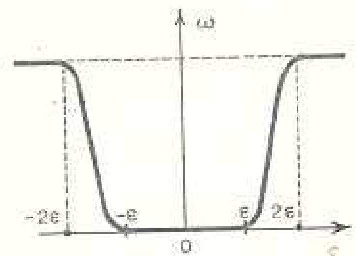
Pour tout point $x \in M$ non critique, choisissons un vecteur tangent $X(x) \in T_x(M)$, transversal à la courbe de niveau $f(x) = c^{te}$ et dirigé dans le sens de la croissance de f; c'est-à-dire un vecteur

$$X(x) = \alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{tel que} \quad Df.X(x) = \alpha \frac{\partial f}{\partial u} + \beta \frac{\partial f}{\partial v} > 0.$$



On peut choisir $X(x)$ dépendant différentiablement de x, par exemple en choisissant $X(x)$ de longueur 1 et orthogonal aux courbes de niveau de f.

On aura besoin d'une fonction dérivable $\alpha : M \to \mathbf{R}$ nulle au voisinage des points critiques de f et égale à 1 hors d'un voisinage de ces points critiques. On peut la construire de la manière suivante. Dans $\mathbf{R}^2$ soit ω une fonction dérivable égale à 0 dans la boule $D(\varepsilon)$ de rayon ε et à 1 hors de la boule $D(2\varepsilon)$ de rayon 2ε. Si $\varphi : D(2\varepsilon) \to M$ est une paramétrisation centrée au point critique c, on



pose, pour $x \in \varphi(D(2\varepsilon))$, $\alpha(x) = \omega(\varphi^{-1}(x))$. Si les voisinages $\varphi(D(2\varepsilon))$ des divers points critiques (isolés) sont assez petits pour être disjoints, on prolonge α par 1 en dehors de ces voisinages.

Posons :

$$Y(x) = \frac{\alpha(x)}{Df.X(x)} \cdot X(x) \quad \text{si } x \text{ n'est pas critique,}$$

$$Y(x) = 0 \qquad \text{si } x \text{ est critique.}$$

Le champ de vecteurs $Y(x)$ est différentiable et l'on a $Df.Y(x) = \alpha(x)$. Comme il n'y a pas de points critiques dans le compact $W(a, b)$, on peut supposer que α vaut 1 dans cette partie. Soit φ_t le groupe à un paramètre de difféomorphismes de M associé au champ $Y(x)$. On a :

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi_t(x))) = Df.Y(\varphi_t(x)) = \alpha(\varphi_t(x)).$$

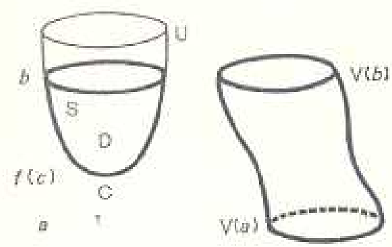
La fonction $t \mapsto f(\varphi_t(x))$ est linéaire de dérivée 1 pourvu que $\alpha(\varphi_t(x)) = 1$; c'est le cas si $f(\varphi_t(x)) \in [a, b]$. En particulier, le difféomorphisme φ_{b-a} envoie $M(a)$ sur $M(b)$ et $V(a)$ sur $V(b)$. L'application $\psi : V(a) \times [a, b] \to W(a, b)$ définie par $\psi(x, t) = \varphi_{t-a}(x)$ est un « difféomorphisme » dont l'inverse est $\psi^{-1}(y) = (\varphi_{a-f(y)}(y), f(y))$.

Ainsi, lorsque a varie continûment dans l'ensemble des valeurs régulières de f, les variétés $M(a)$ et $V(a)$ sont invariantes à difféomorphismes près. La courbe $V(a)$ est compacte (fermée dans M compacte). Nous admettons qu'elle est réunion d'un nombre fini de cercles (à difféomorphisme près) qui sont ses composantes connexes par arcs (cf. ci-dessous chap. V). Le nombre des composantes de $V(a)$ ne varie pas tant que a ne franchit pas de valeur critique.

4. FRANCHISSEMENT D'UNE VALEUR CRITIQUE

Si a et b sont des valeurs régulières de f entre lesquelles il n'y a qu'une valeur critique $f(c)$ correspondant à un point critique c, les variétés $M(a)$ et $M(b)$ ne sont pas homéomorphes, et $V(a)$ peut être différent de $V(b)$. Nous allons étudier les changements produits par le franchissement d'une valeur critique. Il résulte du § 3 qu'on peut supposer a et b aussi voisins de $f(c)$ qu'on veut. On prendra $a = f(c) - \varepsilon$, $b = f(c) + \varepsilon$ en s'autorisant à choisir $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut.

1er cas : indice 0. — *Si c est un point critique d'indice 0, alors* $M(b)$ *est difféomorphe à l'union disjointe de* $M(a)$ *et d'un disque* D (de dimension 2); *et* $V(b)$ *à l'union de* $V(a)$ *et du cercle* S, *bord du disque* D.



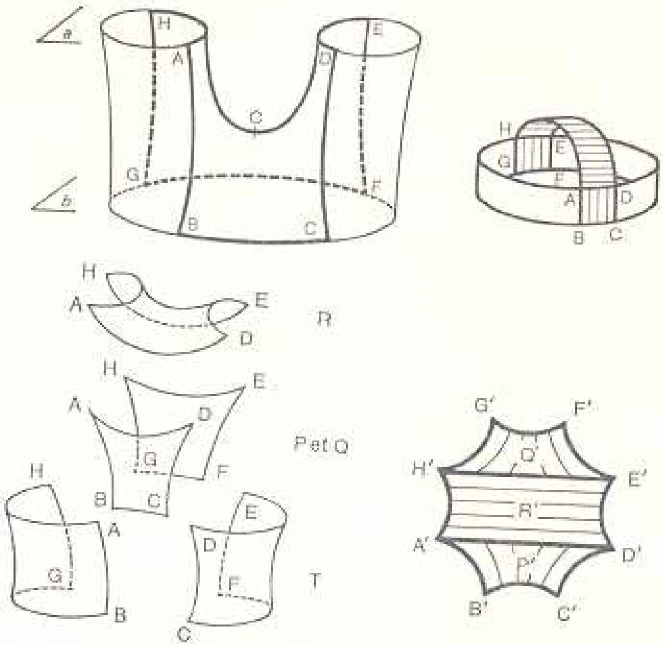
Soit U un voisinage canonique de c limité par la courbe de niveau $f(c) + 2\varepsilon$; l'intersection $D = M(b) \cap U$ est difféomorphe au disque $X^2 + Y^2 \leqslant \varepsilon$, et sa frontière $S = V(b) \cap U$ au cercle $X^2 + Y^2 = \varepsilon$, cependant que $V(a) \cap U$ et $M(a) \cap U$ sont vides.

On raisonne alors comme au § 3, avec une fonction α nulle dans un voisinage du disque D. On obtient un difféomorphisme φ_{a-b} de $M(b) - D$ sur $M(a)$ qui induit un difféomorphisme de $V(b) - S$ sur $V(a)$.

2e cas : indice 2. — Si c est un point critique d'indice 2, alors $M(b)$ est homéomorphe à l'espace obtenu en collant à $M(a)$ un disque D le long d'une composante S (circulaire) *de $V(a)$ et $V(b)$ est difféomorphe à $V(a) - S$.*

Il suffit d'appliquer le 1er cas à la fonction $-f$ en échangeant les rôles de a et b.

3e cas : indice 1. — Si c est un point critique d'indice 1, alors $M(b)$ est homéomorphe à l'espace obtenu en collant à $M(a)$ un rectangle, par deux de ses côtés opposés, le long de deux segments disjoints I et J contenus dans $V(a)$; la transformation de $V(a)$ en $V(b)$ dépend des cas de figures : le nombre des composantes connexes (circulaires) *de $V(b)$ diffère de celui de $V(a)$ de -1, 0 ou 1.*



Soit $U' = \varphi(U(2\varepsilon))$ un voisinage canonique de c et $U = \varphi(U(\varepsilon))$ un voisinage canonique plus petit, compris entre les niveaux $a = f(c) - \varepsilon$ et $b = f(c) + \varepsilon$. L'espace $M(b)$ est obtenu en collant $W(a, b)$ à $M(a)$ le long de $V(a)$. L'espace $W(a, b)$ s'obtient par recollement de U et de $T = \overline{W(a, b) - U}$. On décomposera enfin U en trois morceaux P, Q et R, et c'est ainsi qu'on reconstruira $M(b)$ avec beaucoup de collages. L'intersection de U et $V(a)$ est constituée de deux segments $I = BC$ et $J = FG$. L'intersection de T et $V(a)$ est l'adhérence K de $V(a) - (I \cup J)$.

Montrons d'abord que T est homéomorphe à $K \times [a, b]$. Cela se fait encore à l'aide d'un groupe à un paramètre φ_t de difféomorphismes de M. On raisonne comme au § 3 avec une fonction α nulle au voisinage de c et égale à 1 dans T. On voudrait que l'application $\psi : K \times [a, b] \to M$ définie par $\psi(x, t) = \varphi_{t-a}(x)$ soit un homéomorphisme sur T. Ceci est réalisé si les courbes intégrales du champ $X(x)$ issues des points $x \in T$ restent dans T entre les niveaux a et b; il revient au même de dire que les courbes intégrales issues des points de U restent dans U entre les niveaux a et b.

Construisons un champ $X(x)$ ayant cette propriété. Soit $Z(x)$ le champ sur $U' = \varphi(U(2\varepsilon))$ image par $D\varphi$ du champ $(X, -Y)$ de $\mathbf{R}^2$. Il est nul en c et, hors de c, transversal aux lignes de niveau et dirigé f croissante (vérification immédiate dans la carte φ^{-1}). Ses courbes intégrales sont les images par φ des hyperboles $XY = c^{te}$; celles qui sont issues d'un point de U sont en entier dans U entre les niveaux a et b. Soit $\beta : M \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable égale à 1 dans U et à 0 hors de $\varphi\left(U\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)\right)$ (construction dans la carte et prolongement par 0 à M). Soit enfin $X_0(x)$ un champ arbitraire sur M, transversal aux lignes de niveau de f, défini sauf aux points critiques. Posons :

$$X(x) = \beta(x)\, Z(x) + (1 - \beta(x))\, X_0(x) \quad \text{si} \quad x \in U'$$
$$X(x) = X_0(x) \quad \text{si} \quad x \notin U'.$$

Il est clair que $X(x)$ est transversal aux lignes de niveau de f, sauf aux points critiques. Dans U, on a $\beta = 1$ donc $X(x) = Z(x)$ et $X(x)$ a bien la propriété demandée.

Découpons par deux horizontales le modèle $U(\varepsilon)$ en trois parties $P' = (A'\,B'\,C'\,D')$, $Q' = (E'\,F'\,G'\,H')$, $R' = (A'\,D'\,E'\,H')$ (voir fig. p. 66) toutes trois homéomorphes à des rectangles. Soient P, Q, R leurs images dans M par la paramétrisation φ. L'espace $M(b)$ est le produit du recollement de $M(a)$, T, P, Q et R ; le dessin vaut mieux que de longues explications.

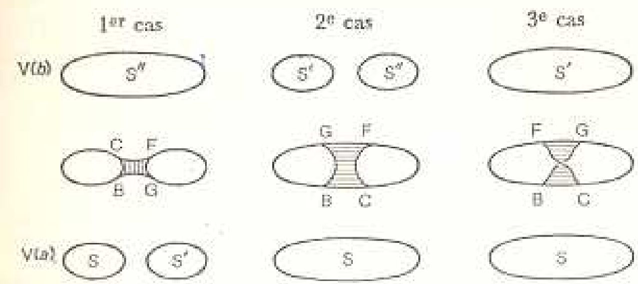
Les espaces P et Q sont homéomorphes à des rectangles, par exemple $I \times [a, b]$ et $J \times [a, b]$ respectivement, de sorte que ces homéomorphismes se recollent (chap. II, § 5) à l'homéomorphisme $\psi^{-1} : T \to K \times [a, b]$ pour donner un homéomorphisme de $T \cup P \cup Q$ sur $(K \cup I \cup J) \times [a, b] = V(a) \times [a, b]$. Il en résulte que $M(b) - \text{int}\,(R) = M(a) \cup T \cup P \cup Q$ s'obtient en collant le cylindre $V(a) \times [a, b]$ à $M(a)$ le long de $V(a)$; cet espace est donc homéomorphe à $M(a)$ (cf. § 3). De plus $M(b)$ est homéomorphe au recollement de R et $M(a)$ obtenu en collant AD sur I et EH sur J, ce qu'il fallait démontrer.

Transformation de $V(a)$ *en* $V(b)$. — Des constructions précédentes, il résulte qu'on obtient $V(b)$ à partir de $V(a)$, à homéomorphisme près, par le procédé suivant : on ôte à $V(b)$ les intérieurs de deux petits segments disjoints $I = BC$ et $J = FG$, puis on recolle à l'espace K obtenu deux segments BG et CF. La transformation décrite dépend des positions relatives de B, C, F et G sur $V(a)$.

1er cas : I et J ne sont pas dans la même composante connexe de $V(a)$. Soient S la composante de I et S′ celle de J. L'espace $\overline{S - I}$ est un segment BC, l'espace $\overline{S' - J}$ est un segment FG ; quand on les recolle par des segments BG et CF on obtient un espace homéomorphe à un cercle S″. L'espace $V(b)$ est obtenu à partir de $V(a)$ en remplaçant $S \cup S'$ par S″.

2e cas : I et J sont dans la même composante connexe S *de* $V(a)$ *et les arcs* $\widehat{BC} = I$ *et* $\widehat{FG} = J$ *ont même orientation sur* S. L'espace $\overline{S - (I \cup J)}$ est la réunion de deux segments BG et CF. Lorsqu'on recolle deux autres segments BG et CF, on obtient deux cercles S′ et S″. L'espace $V(b)$ est obtenu à partir de $V(a)$ en remplaçant S par $S' \cup S''$.

3e cas : I et J sont dans la même composante connexe S *de* $V(a)$ *et les arcs* $\widehat{BC} = I$ *et* $\widehat{FG} = J$ *sont d'orientations opposées sur* S. L'espace $\overline{S - (I \cup J)}$ est la réunion de deux segments BF et CG. Lorsqu'on recolle deux segments BG et CF, on obtient un cercle S′. L'espace $V(b)$ est obtenu à partir de $V(a)$ en remplaçant S par S′.



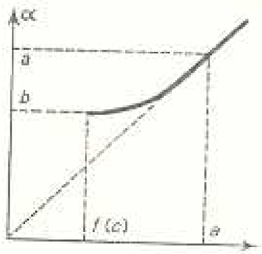
Nous verrons que les trois situations peuvent effectivement se produire.

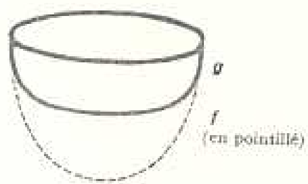
5. CHANGEMENT DE FONCTION DE MORSE DANS UN VOISINAGE CANONIQUE

On va montrer que, si U est un voisinage canonique d'un point critique c d'une fonction de Morse f, il existe une nouvelle fonction de Morse g coïncidant avec f hors de U et n'ayant dans U que le point critique c, mais avec une valeur critique $g(c)$ qu'on peut imposer entre certaines limites. On obtient g par un simple changement de fonction dans U.

Proposition 2. — *Soient c un point critique d'indice 0 de la fonction de Morse f et U un voisinage canonique de c limité par la courbe de niveau $f(x) = a$. Quel que soit $b < a$, il existe une fonction de Morse g ayant les mêmes points critiques que f avec même indice, coïncidant avec f hors de U et telle que $g(c) = b$.*

Il existe une fonction $\alpha : [f(c), a] \to \mathbf{R}$ dérivable, de dérivée strictement positive, telle que $\alpha(f(c)) = b$ et que $\alpha(t) = t$ si t est voisin de a. Si φ est la paramétrisation du voisinage canonique U, posons, pour $x \in$ U, $g(x) = \alpha(f(c) + g_0(\varphi^{-1}(x)))$ où g_0 est la fonction modèle $X^2 + Y^2$. Le seul point critique g dans U est c car la dérivée de α n'est pas nulle. On a $g(c) = \alpha(f(c)) = b$. Lorsque $\alpha(t) = t$, on a $g(x) = f(c) + g_0(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$. C'est le cas au voisinage de la frontière de U, ce qui prouve que cette fonction g sur U se recolle à f sur M — U pour donner la fonction de Morse g cherchée.

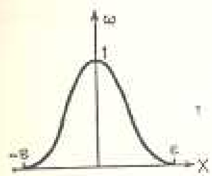


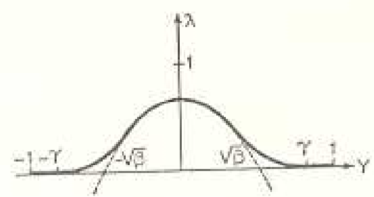


Pour un point d'indice 2, la proposition 2 appliquée à la fonction $-f$ montre qu'on peut choisir $g(c)$ arbitraire strictement supérieur au niveau du bord d'un voisinage canonique.

Proposition 3. — *Soient c un point critique d'indice 1 de la fonction de Morse f et U un voisinage canonique de c limité au niveau inférieur $f(x) = a$ et au niveau supérieur $f(x) = b$. Quel que soit $d \in]a, b[$, il existe une fonction de Morse g, ayant les mêmes points critiques que f avec même indice, coïncidant avec f hors de U et telle que $g(c) = d$.*

Il suffit comme précédemment d'effectuer une transformation de la fonction modèle $g_1 = X^2 - Y^2$ à l'intérieur du voisinage modèle. Supposons que le voisinage modèle est U(1) et montrons qu'il existe une fonction $h(X, Y)$ coïncidant avec $g_1(X, Y)$ au voisinage du bord de U(1), dont le seul point critique est 0 et dont la valeur critique correspondante est $h(0) = -\beta \in]-1, 0]$ (si β est négatif la démonstration est analogue en intervertissant X et Y).





Soit $\omega : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable positive à support dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$, telle que $\omega(0) = 1$ et que $X.\omega'(X) \leqslant 0$. Soit $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable positive, à support dans $[-\gamma, \gamma]$ avec $\gamma \in]\sqrt{\beta}, 1[$ telle que $\lambda(0) = \beta$ et dont la dérivée $\lambda'(Y)$ satisfasse à $2Y + \lambda'(Y) > 0$ si $Y > 0$ et $2Y + \lambda'(Y) < 0$ si $Y < 0$. La fonction $\mu(Y) = \beta - Y^2 + \eta Y^2$ satisfait, pour $\eta > 0$, à $\mu(0) = \beta$ et aux conditions sur la dérivée. Si η est assez petit, $\mu(Y)$ est négative pour $Y = \pm \gamma$; pour construire λ, il suffit d'arrondir la fonction μ au voisinage de ses zéros $Y = \pm \sqrt{\frac{\beta}{1-\eta}}$.

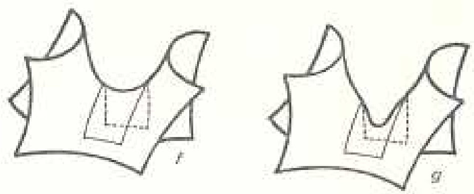
Si ε est assez petit, le rectangle $[-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\gamma, \gamma]$ est contenu dans l'intérieur de $U(1)$ de sorte que la fonction :

$$h(X, Y) = X^2 - Y^2 - \omega(X)\,\lambda(Y)$$

coïncide avec g_1 au voisinage de la frontière de $U(1)$. On a $h(0) = -\omega(0)\,\lambda(0) = -\beta$ et il reste à montrer que 0 est le seul point critique de h dans $U(1)$. Les dérivées partielles sont :

$$h'_X = 2X - \omega'(X)\,\lambda(Y),$$
$$h'_Y = -2Y - \omega(X)\,\lambda'(Y).$$

Du fait que $\lambda(Y) \geqslant 0$ et que $\omega'(X)$ est du signe de $-X$, la dérivée h'_X ne s'annule que si $X = 0$. Dans ce cas on a $h'_Y = -2Y - \lambda'(Y)$; la dérivée h'_Y ne s'annule que pour $Y = 0$ étant donné le choix qu'on a fait pour la fonction λ. Ceci démontre la proposition 3.



Voici une conséquence de la proposition 2 et du théorème 1. On dit qu'une fonction de Morse est *ordonnée* si les indices des points critiques sont fonction croissante des valeurs critiques (les valeurs critiques d'indice 0 sont inférieures aux valeurs critiques d'indice 1, etc.).

THÉORÈME 4. — *Sur une surface compacte, il existe une fonction de Morse ordonnée.*

Soit f une fonction de Morse sur M (théorème 1) et soient a et b les bornes inférieure et supérieure des valeurs critiques (en nombre fini) d'indice 1. D'après la proposition 2, on peut trouver une fonction g ayant mêmes points critiques que f, avec même indice, dont les valeurs critiques d'indice 0 sont inférieures à a et les valeurs critiques d'indice 2 supérieures à b.

CHAPITRE V

LA CLASSIFICATION DES SURFACES

Soit M une variété différentiable compacte connexe de dimension 2 (surface). Par l'étude d'une fonction de Morse sur M, on va montrer que M est homéomorphe à l'un des espaces $\mathbf{T}_n$ $(n \geqslant 0)$ ou $\mathbf{U}_n$ $(n \geqslant 1)$ décrits au chapitre II. Inversement, chacun de ces espaces est homéomorphe à une variété différentiable de sorte que l'on a un dénombrement complet, à homéomorphisme près de toutes les surfaces différentiables compactes connexes. Ce fait est particulier à la dimension 2 et n'a pas d'analogue (1) pour les variétés de dimension $p \geqslant 3$.

1. CLASSIFICATION DES COURBES

Montrons d'abord que l'étude des variétés compactes se ramène à l'étude des variétés compactes connexes.

THÉORÈME 1. — *Une variété topologique compacte de dimension p a un nombre fini de composantes connexes par arcs. Ces composantes sont des variétés compactes de dimension p.*

Les composantes connexes par arcs d'une variété sont ouvertes (chap. Ier, proposition 4). S'il y en a une infi-

(1) Cf. A. MARKOV, *Insolubility of the problem of homeomorphy*, *Proc. Intern. Congress of Math.*, 1958, Cambridge University Press, p. 300-306.

nité, en choisissant un point dans chaque composante, on peut construire une suite qui n'a pas de point adhérent : tout point de la variété possède un voisinage, sa composante connexe par arcs, qui ne contient qu'un point de la suite. Ceci prouve qu'il y a un nombre fini de composantes. Chacune d'elles, ouverte, est une variété de dimension p et, fermée dans un espace compact, est compacte.

THÉORÈME 2. — *Toute variété différentiable compacte connexe de dimension 1 est homéomorphe au cercle* (1).

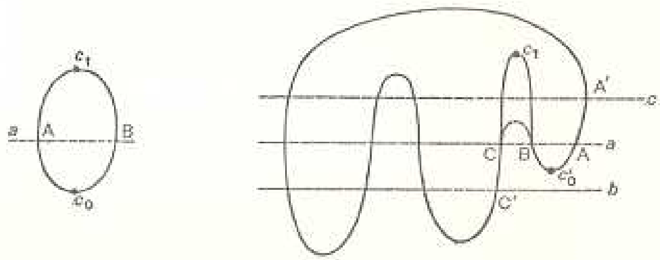
Soit M une courbe différentiable compacte connexe et $f : \mathrm{M} \to \mathbf{R}$ une fonction de Morse ordonnée (chap. IV, théorème 4). Puisque M est compacte, la fonction f a nécessairement un minimum c qui est un point critique d'indice 0, et un maximum c' qui est un point critique d'indice 1.

Supposons, d'abord, que ce sont les seuls points critiques de f, et soit a un niveau intermédiaire entre celui de c et celui de c', c'est-à-dire : $f(c) < a < f(c')$. L'espace $\mathrm{M}(a) = f^{-1}(]-\infty, a])$ est homéomorphe à un segment fermé (chap. IV, proposition 1 et § 4) et sa frontière $\mathrm{V}(a) = f^{-1}(a)$ est constituée de deux points A et B. De même, l'espace $\mathrm{M}'(a) = f^{-1}([a, +\infty[)$ est homéomorphe à un segment fermé et possède la même frontière. L'espace M s'obtient en recollant $\mathrm{M}'(a)$ et $\mathrm{M}(a)$ le long de $\mathrm{V}(a)$. Remarquons que le cercle s'obtient aussi en recollant deux segments. Il en résulte, par recollement d'homéomorphismes (chap. II, § 5) que M est homéomorphe au cercle.

Dans le cas général où il y a n points critiques d'indice 0, si a est un niveau intermédiaire séparant les niveaux des points critiques d'indice 0 de ceux d'indice 1, l'espace $\mathrm{M}(a)$

(1) Il est même vrai que toute variété *topologique* compacte connexe de dimension 1 est homéomorphe au cercle et que toute courbe différentiable compacte connexe est difféomorphe au cercle.

est homéomorphe à l'union disjointe de n segments (chap. IV, § 4) et $V(a)$ est constitué de $2n$ points. Il en résulte que $M'(a)$ est constitué de n segments et qu'il y a n points critiques d'indice 1.



Soit c_n le point critique d'indice 0 de niveau le plus élevé; il est situé sur une composante d'extrémités A et B de $M(a)$. Dans $M'(a)$, la composante D_1 qui contient B contient un point critique d'indice 1 noté c'_n. La deuxième extrémité C de D_1 est un point de niveau a distinct de A, sinon M ne serait pas connexe. En la modifiant dans le segment D_1, on peut remplacer f par une fonction de Morse f' pour laquelle c'_n est le point critique d'indice 1 de plus bas niveau et $f'(c'_n) > a$ (chap. IV, § 5, proposition 2). Soient b et c des niveaux tels que $b < f'(c_n) < a < f'(c'_n) < c$ et tels que c_n et c'_n soient les seuls points critiques de f' dont les niveaux sont compris entre b et c. Montrons que $M(b)$ est homéomorphe à $M(c)$. L'espace $M(b)$ est homéomorphe à l'union de $(n-1)$ segments. Pour obtenir $M(c)$, on prolonge un peu $(n-2)$ d'entre eux; quant au dernier, on le prolonge un peu à l'une de ses extrémités et on colle à l'autre, successivement, les segments C' C, CB, BA et AA' (voir figure). Par suite $M(c)$ est aussi homéomorphe à l'union de $(n-2)$ segments.

La variété M s'obtient en recollant $M'(c)$ et $M(c)$ qui

est homéomorphe à $M(b)$. Les points critiques c_n et c'_n ne jouent plus aucun rôle [1]. La variété M, obtenue en collant deux familles de $(n-1)$ segments est donc homéomorphe à une courbe M' sur laquelle il existe une fonction de Morse avec $(2n-2)$ points critiques (recollement des homéomorphismes). Ceci montre, par récurrence sur n, que M est homéomorphe à un cercle [2].

2. PRÉLIMINAIRES A LA CLASSIFICATION DES SURFACES

On établit la classification des surfaces par une démonstration analogue à celle du théorème 2, mais évidemment plus compliquée car il y a des points critiques d'indice 0, 1 et 2. Dans toute la suite, M désigne une surface compacte connexe et $f : M \to \mathbf{R}$ une fonction de Morse ordonnée. Voici d'abord un analogue du procédé d'élémination utilisé dans la démonstration du théorème 2.

Supposons qu'entre les niveaux b et c, la fonction f a exactement deux points critiques c_0 et c'_0 d'indices 0 et 1 respectivement. On dit que les points critiques c_0 et c'_0 sont *en bonne position* si c_0 possède un voisinage canonique U_0 de niveau supérieur d et c'_0 un voisinage canonique U_1 de niveau inférieur d de telle sorte que, dans la courbe de niveau $V(d)$, un des deux segments qui composent $U_1 \cap V(d)$ (et un seul) soit contenu dans le cercle qui constitue $U_0 \cap V(d)$.

PROPOSITION 1. — *Avec les notations ci-dessus, si les points critiques c_0 et c'_0 sont en bonne position, l'espace $M(c)$ est homéomorphe à l'espace $M(b)$.*

(1) On peut démontrer qu'on peut modifier f' sur le segment A' C' et la transformer en une fonction de Morse qui n'a plus de point critique sur le segment A' C'.

(2) On a développé cette démonstration facile pour bien préciser l'idée des démonstrations de ce chapitre.