Tutorato del corso di GE 3
Lezione dell' 11/05/2009

Esercizi

1. Costruire un atlante per ognuna delle seguenti superfici:
    - S^2 (soluzione a pag. 185);
    - il cilindro $S^1 \times R \subset R^3$ (soluzione a pag. 186);
    - $\mathbf{RP}^2$ (soluzione a pag. 187).
2. Dimostrare che ogni cappio non suriettivo in $S^n (n \geq 1)$ è equivalente a un cappio costante (senza usare il teorema 16.10).
3. Dimostrare che ogni varietà topologica connessa è anche connessa per archi.
4. Sia X una varietà topologica connessa. Dati $p, q \in X$ distinti è vero che esiste sempre un omeomorfismo $f_{p,q} : X \to X$ tale che $f(p) = q$? Fornire una dimostrazione o un controesempio dell'affermazione.
5. Siano $Y_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.c. } (x-1)^2+y^2 = 1\}$, $Y_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.c. } (x+1)^2+y^2 = 1\}$, $Y = Y_1 \cup Y_2$. Dire se Y sia o meno una varietà topologica (dove la topologia considerata su Y è quella indotta dal quella euclidea in $\mathbf{R}^2$).
6. Dimostrare che una varietà topologica è localmente compatta, localmente connessa (risp. connessa per archi), localmente semplicemente connessa (i.e. ogni punto ha una famiglia fondamentale di intorni che sono semplicemente connessi).
7. Sia $T = S^1 \times S^1$ il toro. Definire esplicitamente un isomorfismo del suo gruppo fondamentale con $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (cioe' definendo un cappio che corrisponde a (n, m), per ogni $(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$).
8. Dimostrare che l'applicazione $t \mapsto \tanh(t)$ definisce un omeomorfismo di $\mathbf{R}$ su $(-1, 1)$.
9. Sia $Y = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \text{ t.c. } x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2\}$. Calcolare il gruppo fondamentale di Y.