Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
GE3 - Topologia
Primo Appello
Martedì 9 Giugno 2009

1. Sia $X := \{(x, y, z)|x^2 + y^2 = z^2\} \subseteq \mathbb{R}^3_{x,y,z}$ il cono infinito con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$. Si considerino le seguenti relazioni di equivalenza su X:

$$\rho_1 : (x, y, z)\rho_1(x', y', z') \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ t.c. } (x, y, z) = (\lambda x', \lambda y', \lambda z'),$$

$$\rho_2 : (x, y, z)\rho_2(x', y', z') \Leftrightarrow z = z'.$$

Siano Y_1 lo spazio topologico quoziente X/ρ_1, $p_1 : X \to Y_1$ la proiezione canonica e Y_2 lo spazio topologico quoziente X/ρ_2, $p_2 : X \to Y_2$ la proiezione canonica.

(a) Descrivere $[(0, 0, 0)]_{\rho_1}$, $[(0, 0, 0)]_{\rho_2}$, $[(1, 0, 1)]_{\rho_1}$, $[(1, 0, 1)]_{\rho_2}$.

(b) Dopo aver definito la nozione di aperto saturo rispetto ad un'applicazione suriettiva, fare un esempio di aperto NON saturo per p_1.

(c) Dire se Y_1 è uno spazio di Hausdorff e se è compatto. Si può realizzare Y_1 come sottospazio di $\mathbb{R}^n$(con la top. euclidea) per qualche n?

(d) Dimostrare che Y_2 è omeomorfo a $\mathbb{R}$ (con la top. euclidea). [Sugg.: utilizzare la proiezione $q : X \to \mathbb{R}_z$].

Soluzione:

(a) $[(0, 0, 0)]_{\rho_1} = \{(0, 0, 0)\}$, $[(0, 0, 0)]_{\rho_2} = \{(0, 0, 0)\}$, $[(1, 0, 1)]_{\rho_1} = \{(x, 0, x) : x \neq 0\}$, $[(1, 0, 1)]_{\rho_2} = \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 = 1\}$.

(b) Per la nozione di aperto saturo si consulti il libro di testo. Un esempio di aperto non saturo per p_1 è il seguente: $A := D_1((0, 0, 0)) \cap X$. A è aperto per definizione di topologia indotta, ma non è saturo, dato che, ad esempio, $(1/4, 1/4, \sqrt{2}/4)\rho_1(10, 10, 10\sqrt{2})$ con $(1/4, 1/4, \sqrt{2}/4) \in A$ ma $(10, 10, 10\sqrt{2}) \notin A$.

(c) Sia U un aperto di Y_1 contenente il punto $[(0, 0, 0)]_{\rho_1}$. U deve essere quindi immagine di un aperto saturo $V \subseteq X$ e tale che $[(0, 0, 0)] \in p_1(V)$, cioè $(0, 0, 0) \in V$. Un aperto di X che contiene

$(0,0,0)$ deve contenere un aperto W_r del tipo $W_r := D_r((0,0,0)) \cap X$, con $r \in \mathbb{R}^+$. Mostriamo che $p_1(W_r) = Y_1$: sia $(x,y,z) \in X$; se $(x,y,z) = (0,0,0)$ allora $(x,y,z) \in W_r$; se $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ allora $(\frac{rx}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{ry}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{rz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) \in W_r$, quindi, siccome $(\frac{rx}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{ry}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{rz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}})\rho_1(x,y,z)$, allora $p_1(W_r) = Y_1$. Perciò $U = p_1(V) \supseteq p_1(W_r) = Y_1 \Rightarrow U = Y_1$. Riassumendo: l'unico aperto di Y_1 che contiene $[(0,0,0)]_{\rho_1}$ è tutto Y_1, quindi Y_1 non è di Hausdorff.

Sia $r > 0$: per quanto visto $Y_1 = p_1(W_r)$, quindi si ha anche $Y_1 = p_1(\overline{W_r})$. Ma $\overline{W_r}$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^3$, quindi è compatto; essendo p_1 continua, si ha $Y_1 = p_1(\overline{W_r})$ compatto. Alternativamente bastava osservare che essendo Y_1 l'unico aperto che contiene $[(0,0,0)]_{\rho_1}$, allora forzatamente ogni ricoprimento di aperti di Y_1 contiene l'aperto Y_1 e quindi da ogni tale ricoprimento se ne può estrarre uno finito, nella fattispecie $\{Y_1\}$.

Y_1, non essendo uno spazio di Hausdorff, non si può realizzare come sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

(d) Sia $f : Y_2 \to \mathbb{R}_z$ così definita: $f([(x,y,z)]_{\rho_2}) := z$. Chiaramente f è ben definita ed è biiettiva. Inoltre $f \circ p_2 = q$. Per definizione di topologia quoziente p_2 è un'identificazione. Siccome q è una proiezione, allora è un'applicazione aperta continua e suriettiva, quindi è anch'essa un'identificazione. Perciò f, essendo biiettiva, è un omemorfismo (cfr. E. Sernesi - Geometria 2 - cap. 2 - prop. 7.4 (pag. 75)).

2. Dimostrare che non esiste alcuna funzione continua e iniettiva da $\mathbb{R}^2$ (con la top. euclidea) a $\mathbb{R}$ (con la top. euclidea).

Soluzione:

Per assurdo supponiamo esista $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva. Sia $X := f(\mathbb{R}^2)$. X, essendo immagine continua del connesso $\mathbb{R}^2$, è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$, cioè un intervallo. Per l'iniettività di f, X non è costituito da un solo punto. Sia $y \in X$ un punto interno a X, ovvero tale che $\exists x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < y$ e $x_2 > y$. Sia $Z := X \setminus \{y\}$. Z è sconnesso, dato che $Z = ((-\infty, y) \cap Z) \cup ((y, +\infty) \cap Z)$, con $(-\infty, y) \cap Z$ e $(y, +\infty) \cap Z$ sottoinsiemi aperti di Z, disgiunti e non vuoti. Per l'iniettività di f esiste un unico $p \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(p) = y$. Ma allora $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) = Z$, con $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ connesso, Z sconnesso e f continua: assurdo.

3. Determinare gli insiemi connessi di $\mathbb{R}$ con la topologia j_s. [Si ricordi che la topologia j_s su $\mathbb{R}$ è quella topologia che ha per base gli intervalli di $\mathbb{R}$ aperti a sinistra e chiusi a destra].

   Soluzione:

   Chiaramente un punto di $\mathbb{R}$ è connesso. Sia allora $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme con almeno 2 punti. Quindi esistono $x, y \in A$, $x \neq y$. Senza perdita di generalità possiamo assumere $x < y$. $(-\infty, x]$ è un aperto, per definizione di topologia j_s e contiene x. $(x, +\infty) = \cup_{z>x}(x, z]$ è un aperto (perché unione di aperti della topologia j_s) e contiene y. Perciò $A = (A \cap (-\infty, x]) \cup (A \cap (x, +\infty))$ con $A \cap (-\infty, x]$ e $A \cap (x, +\infty)$ aperti (nella topologia indotta su A), disgiunti e non vuoti. Quindi A è sconnesso.

   Perciò $\mathbb{R}$, con la topologia j_s, è totalmente sconnesso, ovvero gli unici insiemi connessi sono i singoli punti.

4. Classificare la superficie compatta e connessa S ottenuta come quoziente di un poligono con la seguente etichettatura:

$$aaa_1a_2a_3a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1} \dots a_{3k-2}a_{3k-1}a_{3k}a_{3k-2}^{-1}a_{3k-1}^{-1}a_{3k}^{-1}bb.$$

   Soluzione:

   Il poligono ha $6k+4$ lati. Le classi di equivalenza dei vertici sono $k+1$. Quindi la caratteristica di Eulero di S è $\chi(S) = k+1-3k-2+1 = -2k$. Il poligono presenta coppie di lati del secondo tipo (aa, bb), quindi S non è orientabile, perciò il genere di S è $g(S) = 2 - \chi(S) = 2 + 2k$. Quindi S è un multipiano proiettivo di genere $2+2k$, ovvero è la somma connessa di $2 + 2k$ piani proiettivi.