

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Anno Accademico 2008/2009**  
**GE3 (Topologia)**  
**Appello X - Lunedì 7 Settembre 2009**

1. Sia  $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$  con la topologia di sottospazio di  $\mathbb{R}$ . Sia  $f : \mathbb{Z} \longrightarrow X$  definita da

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \neq 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Supponendo che  $\mathbb{Z}$  abbia la topologia discreta, verificare a) se  $f$  è continua, b) se  $f$  è un omeomorfismo.

2. Sia  $\mathbb{Z}^2$  l'insieme costituito dai punti di  $\mathbb{R}^2$  a coordinate intere e sia  $\mathcal{U}$  la famiglia costituita dai sottoinsiemi  $U \subset \mathbb{R}^2$  il cui complementare è contenuto in  $\mathbb{Z}^2$ .
- (a) Dimostrare che  $\mathcal{U}$  è base di un'unica topologia  $\mathcal{T}$ .
  - (b) Verificare se  $\mathbb{R}^2$  con la topologia  $\mathcal{T}$  è uno spazio  $T_1$  oppure  $T_2$ .
  - (c) Verificare se  $\mathbb{R}^2$  con la topologia  $\mathcal{T}$  è uno spazio compatto oppure connesso.
  - (d) Si determini la chiusura, rispetto alla topologia  $\mathcal{T}$ , di ciascuno dei sottoinsiemi seguenti:  $A = \{(0,0)\}$ ,  $B = \{(1, -1/2)\}$ ,  $C = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ .
3. Sia  $X = S_-^2 \cup S_+^1 \subset \mathbb{R}^3$  dove  $S_-^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : z \leq 0\}$  è la 2-semisfera inferiore chiusa, e  $S_+^1 = \{(x, y, z) \in S^2 : y = 0, z \geq 0\}$ . Dopo aver verificato che  $X$  è connesso per archi, calcolarne il gruppo fondamentale.
4. Dimostrare che un sottoinsieme chiuso e discreto di uno spazio compatto è finito.

## SOLUZIONI

1)  $f$  è continua perché  $\mathbb{Z}$  ha la topologia discreta e quindi ogni suo s.i. è aperto, in particolare lo sono quelli della forma  $f^{-1}(A)$ , con  $A \subset X$  aperto.  $f$  è biunivoca ma non è un omeomorfismo perché non è aperta. Infatti  $\{0\} = f(\{0\})$  non è un s.i. aperto di  $X$  perché ogni aperto di  $\mathbb{R}$  che contiene 0 contiene altri punti di  $X$ . Quindi  $\{0\}$  è un s.i. aperto di  $\mathbb{Z}$  la cui immagine non è aperta.

2) a) Per la Prop. 2.3 basta verificare che

-  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento: ovvio perché  $\mathbb{R}^2 \in \mathcal{U}$ .

- Se  $U, V \in \mathcal{U}$  allora  $U \cap V$  è unione di elementi di  $\mathcal{U}$ . Supponiamo  $U = \mathbb{R}^2 \setminus A$ ,  $V = \mathbb{R}^2 \setminus B$ , con  $A, B \subset \mathbb{Z}^2$ . Allora  $U \cap V = (\mathbb{R}^2 \setminus A) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B) = \mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B) \in \mathcal{U}$  perché  $A \cup B \subset \mathbb{Z}^2$ .

b)  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  non è  $T_1$  perché i punti  $a \notin \mathbb{Z}^2$  non sono chiusi. Ciò segue dal fatto che un tale punto  $a$  appartiene a tutti gli aperti non vuoti della topologia, e quindi il suo complementare non è aperto. Non essendo  $T_1$ , lo spazio non è neanche  $T_2$ .

c)  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  non è compatto. Infatti il ricoprimento aperto:  $\{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Z}^2 \setminus \{x\}) : x \in \mathbb{Z}^2\}$  è costituito da infiniti insiemi e non ammette un sottoricoprimento finito, perché non ammette sottoricoprimenti propri.

$(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  è connesso. Infatti gli aperti di  $\mathcal{T}$  sono precisamente gli elementi della base  $\mathcal{U}$ , ed il loro complementare è un s.i. di  $\mathbb{Z}^2$ , che non appartiene a  $\mathcal{U}$ , a meno che non sia  $\emptyset$ . Pertanto non esistono s.i. propri aperti e chiusi.

d)  $A$  è chiuso perché è un s.i. di  $\mathbb{Z}^2$ , quindi  $A = \overline{A}$ . Invece  $B$  e  $C$  non sono contenuti in alcun s.i. di  $\mathbb{Z}^2$  e quindi l'unico chiuso che contiene  $B$  oppure  $C$  è  $\mathbb{R}^2$ . Quindi  $\overline{B} = \mathbb{R}^2 = \overline{C}$ .

3)  $S_-^2$  è omeomorfo ad un disco chiuso, che è connesso per archi.  $S_+^1$  è omeomorfo ad un intervallo chiuso e limitato, anch'esso connesso per archi. Inoltre  $S_-^2 \cap S_+^1 \neq \emptyset$  perché  $(0, 1, 0) \in S_-^2 \cap S_+^1$ , e quindi  $X$  è connesso per archi.

Il sottospazio  $S_-^2$  è contraibile, quindi è omotopicamente equivalente ad uno spazio costituito da un solo punto  $\{\star\}$ . Quindi  $X$  è omotopicamente equivalente allo spazio quoziente ottenuto contraendo  $S_-^2$  a  $\{\star\}$ , che è omeomorfo ad  $S^1$ . Quindi  $\pi_1(X) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ .

4) Se  $Z \subset X$ , con  $X$  compatto e  $Z$  chiuso in  $X$  e discreto, allora  $Z$  è a sua volta compatto. Essendo discreto possiede il ricoprimento aperto  $\mathcal{U} = \{\{z\} : z \in Z\}$ , che non possiede sottoricoprimenti propri. Pertanto  $\mathcal{U}$  dev'essere finito, e ciò avviene se e solo se  $Z$  è finito.