Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Tutorato 8 (29 Aprile 2013)
Connessione & Connessione per archi

1. Discutere la connessione per archi dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$:

   (i) $S := \mathbb{R}^2 \setminus \{(q,q) : q \in \mathbb{Q}\}$;

   (ii) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin \mathbb{Q} \text{ oppure } y \notin \mathbb{Q}\}$;

   (iii) $L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(y-1)(y-2) = 0\}$;

   (iv) $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y-1)(y-2) = 0\}$.

   Soluzione:

   (i) S è connesso per archi.
   Siano $S_1 := \{(x,y) : x \geq y\} \setminus \{(q,q) : q \in \mathbb{Q}\}$ e $S_2 := \{(x,y) : x \leq y\} \setminus \{(q,q) : q \in \mathbb{Q}\}$ allora $S = S_1 \cup S_2$ e $S_1 \cap S_2 := \{(r,r) : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \neq \emptyset$. Per dimostrare che S è connesso per archi sarà quindi sufficiente provare che S_1 è connesso per archi ($S_2 \approx S_1$).
   Facciamo vedere che S_1 è connesso per poligonali (denoteremo con $\prod(P_1, \ldots, P_n)$ la poligonale di vertici $P_1, \ldots, P_n$). Siano $P = (x,y), P' = (x',y') \in S_1$, supponiamo senza perdita di generalità che $x \leq x'$ e $y \leq y'$. Allora posto $Q := (x,y')$ si ha $\prod(P,Q,P') \subseteq S_1$.

   (ii) M è connesso per archi.
   Per dimostrate l'asserto verifichiamo che M è connesso per poligonali. Siano $P = (x,y)$, $Q = (x',y') \in M$. Supponiamo che $x \notin \mathbb{Q}$; consideriamo allora due casi:
   - $y' \notin \mathbb{Q}$. Posto $R := (x,y')$ si ha che $\prod(P,R,Q) \subseteq M$
   - $y' \in \mathbb{Q} \Rightarrow x' \notin \mathbb{Q}$. Sia $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; ponendo $R := (x,\beta)$, $H := (x',\beta)$ si ha $\prod(P,R,H,Q) \subseteq M$.

   Si ragiona analogamente se $x \in \mathbb{Q}$ ($\Rightarrow y \notin \mathbb{Q}$).
   In ogni caso esiste una poligonale che congiunge P e Q, da cui segue che M è connesso per archi.

   (iii) L è connesso per archi.
   Infatti L è unione di due spazi A e B connessi per archi la cui intersezione è non vuota. Si considerino $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(y-1)\}$, l'unione dell'asse delle y con la retta orizzontale $y = 1$, e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(y-2) = 0\}$, l'unione dell'asse delle y con la retta orizzontale $y = 2$. A e B sono connessi per archi e $A \cap B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \neq \emptyset$ allora $A \cup B$ è connesso per archi.

   (iv) T non è connesso per archi.
   Basta osservare che il sottospazio T non è connesso in quanto i due chiusi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y-1) = 0\}$ e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y-2) = 0\}$ rappresentano una sconnessione di T.

2. Dimostrare che il prodotto di due spazi connessi per archi è connesso per archi.

   Soluzione:

   Siano X e Y due spazi topologici connessi per archi e siano $p_1 = (x_1,y_1)$ e $p_2 = (x_2,y_2)$ due punti di $X \times Y$. Mostriamo che esiste un arco $\alpha : I \to X \times Y$ tale che $\alpha(0) = p_1$ e $\alpha(1) = p_2$.
   $x_1, x_2 \in X$; allora, essendo X connesso per archi esiste un'applicazione continua $\alpha_X : I \to X$ tale che $\alpha_X(0) = x_1$ e $\alpha_X(1) = x_2$.
   Allo stesso modo esisterà un' applicazione continua $\alpha_Y : I \to Y$ tale che $\alpha_Y(0) = y_1$ e $\alpha_Y(1) = y_2$.
   Consideriamo allora $\alpha : I \to X \times Y$ definita nel modo seguente

   $$\alpha(t) = (\alpha_X(t), \alpha_Y(t));$$

   α è chiaramente continua, poichè lo sono α_X, α_Y, e inoltre $\alpha(0) = (\alpha_X(0), \alpha_Y(0)) = (x_1,y_1) = p_1$ e $\alpha(1) = (\alpha_X(1), \alpha_Y(1)) = (x_2,y_2) = p_2$. α è dunque l'arco cercato tra p_1 e p_2.

3. Una formica torre si muove nel piano solamente lungo le rette di equazione $x = a$ e $y = b$. Siano p e q due punti di un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^2$. Dimostrare che la formica torre può muoversi da p a q senza uscire da A.

   Soluzione:

   In primo luogo osserviamo che essendo A un aperto connesso è anche connesso per archi. Presi due punti $P = (x_0, y_0)$ e $Q \in A$ esiste un arco γ contenuto in A che li connette. Per dimostrare l'asserto facciamo vedere che esiste una spezzata composta da segmenti orizzontali e verticali che connette i due punti e tutta contenuta in A. Sia D_1 un disco chiuso di centro P interamente contenuto in A (D_1 esiste perché A è aperto) e consideriamo $\gamma|_{D_1}$ e il punto $P_1 := \gamma \cap \partial(D_1)$ di coordinate (x_1, y_1). Senza perdita di generalità possiamo supporre che $x_0 < x_1$ e $y_0 > y_1$. Se $\gamma|_{D_1}$ è un segmento orizzontale o verticale allora sia $S_1 := \gamma|_{D_1}$. Altrimenti poniamo $S_1 := \{(x, y_0) : x_0 \leq x \leq x_1\} \cup \{(x_1, y) : y_0 \leq y \leq y_1\}$. Poiché γ è compatto, dopo un numero finito di passi si avrà che $P_n = Q$ e dunque $S = S_1 \cup \ldots \cup S_n = \prod(P, P_1, \ldots, P_n = Q)$ è una poligonale semplice e non chiusa tutta contenuta in A.

4. (a) Si provi che ogni omeomorfismo $f : I \to I$ dell'intervallo euclideo reale chiuso $I = [0, 1]$ su se stesso, possiede almeno un punto fisso.

   (b) Si faccia vedere che l'enunciato (a) non è più vero, se si considerano gli omeomorfismi dell'intervallo euclideo reale aperto (0,1) su se stesso: in altri termini, si dia un esempio di omeomorfismo $g : (0, 1) \to (0, 1)$ tale che nessun punto $x \in (0, 1)$ sia fisso.

   Soluzione:

   (a) Osserviamo innanzitutto che deve essere $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ oppure $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$: infatti $I\backslash 0$ e $I\backslash 1$ sono connessi, da cui, essendo f continua, $f(I\backslash 0) = I\backslash f(0)$ e $f(I\backslash 1) = I\backslash f(1)$ devono essere ancora connessi; ma gli unici punti che non sconnettono I sono 0 e 1.
   Nel primo caso ci sono almeno due punti fissi; nel secondo caso, si consideri l'applicazione continua $h : I \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = f(x) - x$. Poiché risulta $h(0) = 1$ e $h(1) = -1$, il teorema degli zeri permette di concludere che esiste almeno un punto x_0 dell'intervallo I, tale che $h(x_0) = 0$. Per costruzione x_0 è punto fisso per f.

   (b) $f(x) = x^2$ nell'intervallo $(0, 1)$ non ha punti fissi (la funzione $h(x) = x^2 - x$ non si annulla nell'intervallo $(0, 1)$); è inoltre semplice vedere che si tratta di un omeomorfismo (con inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$).

5. Verificare che gli insiemi $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ e $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ sono sconnessi.

   Soluzione:

   Consideriamo l'applicazione determinante:

   $$det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

   Siano $U^- := det^{-1}((-\infty, 0)) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) < 0\}$ e sia $U^+ := det^{-1}((0, +\infty)) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$. Dalla continuità di det segue che gli insiemi U^- e U^+ sono aperti; essi sono inoltre non vuoti e disgiunti. Poichè ovviamente $U^- \cup U^+ = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\} = \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ si conclude che $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è sconnesso.

   Per dimostrare che anche $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ è sconnesso, basta verificare che $\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap U^-$ e $\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap U^+$ realizzano una sconnessione di $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.
   Infatti si ha $\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap U^- = \{A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = -1\}$ mentre $\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap U^+ = \{A \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$. Tali insiemi sono ovviamente non vuoti, disgiunti, aperti in $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ e la loro unione coincide con $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

6. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua e biunivoca tale che $f(S^{n-1}) = S^{n-1}$. Dimostrare che $f(D_1(0)) = D_1(0)$.

   Soluzione:

   Consideriamo $(S^{n-1})^c = D_1(0) \cup A$, con $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| > 1\}$. Essendo f biunivoca e tale che $f(S^{n-1}) = S^{n-1}$ si ha $f((S^{n-1})^c) = (S^{n-1})^c$ o equivalentemente $f(D_1(0) \cup A) = f(D_1(0)) \cup f(A) =$

$D_1(0) \cup A$. Inoltre poichè f è continua e $D_1(0)$ e A sono le due componenti connesse di $(S^{n-1})^c$, si deve avere che $f(D_1(0)) = D_1(0)$ e $f(A) = A$, oppure $f(D_1(0)) = A$ e $f(A) = D_1(0)$.
Supponiamo per assurdo che sia $f(D_1(0)) = A$ e $f(A) = D_1(0)$. Allora si ha:

$$f(\overline{D_1(0)}) = f(D_1(0) \cup S^{n-1}) = f(D_1(0)) \cup f(S^{n-1}) = A \cup S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \geq 1\}$$

ma questo è assurdo in quando $\overline{D_1(0)}$ è compatto (perchè chiuso e limitato), mentre la sua immagine attraverso l'applicazione continua f è illimitata e pertanto non compatta.

7. Dimostrare che uno spazio topologico X connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.

   <u>*Soluzione*</u>:

   Richiamiamo la seguente definizione:

   Definizione: *Uno spazio topologico X si dice* localmente connesso per archi in un punto $p \in X$ *se possiede un sistema fondamentale di intorni connessi per archi di p, o, equivalentemente, se per ogni intorno U di p esiste un intorno $V \subset U$ di p connesso per archi.*
   X si dice localmente connesso per archi *se è localmente connesso per archi in ogni suo punto.*

   Sia p un punto qualsiasi di X e sia $C_a(p)$ la componente connessa per archi di p. Allora, essendo X connesso e $C_a(p) \neq \emptyset$ ($p \in C_a(p)$), sarà sufficiente mostrare che $C_a(p)$ è contemporaneamente aperto e chiuso in X.

   - $C_a(p)$ è aperto in X:
     Sia $q \in C_a(p)$; per la locale connessione di X esiste un intorno U di q connesso per archi $\Rightarrow U \subseteq C_a(q) = C_a(p) \Rightarrow C_a(p)$ è aperto.

   - $C_a(p)$ è chiuso in X:
     Mostriamo che $\overline{C_a(p)} = C_a(p)$: sia $q \in \overline{C_a(p)}$ e sia U un intorno connesso per archi di q (U esiste per l'ipotesi di locale connessione per archi). Chiaramente $C_a(p) \cap U \neq \varnothing$. Sia dunque $s \in C_a(p) \cap U$. Allora, poichè $q, s \in U$, esiste un arco $\alpha : I \to U$ tale che $\alpha(0) = s$ e $\alpha(1) = q$. Introducendo quindi la relazione d'equivalenza ε tale che

     $$x \varepsilon y \Leftrightarrow \exists\, \alpha : I \to X \text{ continua tale che } \alpha(0) = x \text{ e } \alpha(1) = y$$

     si ha $q \varepsilon s$. Inoltre, essendo $s \in C_a(p)$, si ha $s \varepsilon p \Rightarrow$ per la transitività, $q \varepsilon p \Leftrightarrow q \in C_a(p)$.

8. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f : X \to Y$ si dice localmente costante se $\forall x \in X$ esiste un intorno aperto U di x tale che $f(y) = f(x)$ per ogni $y \in U$. Provare che se X è connesso e $f : X \to \mathbb{R}$ è localmente costante allora f è costante.

   <u>*Soluzione*</u>:

   Sarà sufficiente dimostrare che $f^{-1}(f(x))$ è sia aperto che chiuso; infatti, $f^{-1}(f(x)) \neq \emptyset$ e X connesso implicano $f^{-1}(f(x)) = X$.

   - $f^{-1}(f(x))$ è aperto:
     Sia $z \in f^{-1}(f(x))$ allora $f(z) = f(x)$ ed essendo f localmente costante esiste un intorno aperto U di z tale che $f(u) = f(z)$ $\forall u \in U$; dunque $f(u) = f(x)$ per ogni $u \in U$ da cui segue $U \subset f^{-1}(f(x)) \;\Rightarrow\; f^{-1}(f(x))$ è aperto.
   - $f^{-1}(f(x))$ è chiuso:
     Facciamo vedere che $X \setminus f^{-1}(f(x))$ è aperto. Sia $z \in f^{-1}(f(x))$ allora $f(z) \neq f(x)$ ed esiste un intorno aperto V di z tale che $f(u) = f(z)$ per ogni $v \in V \;\Rightarrow\; V \subset X \setminus f^{-1}(f(x))$ e dunque $X \setminus f^{-1}(f(x))$ è aperto.

9. Sia C_n la circonferenza di centro $(\frac{1}{n}, 0)$ e raggio $\frac{1}{n}$ (tutte le circonferenze C_n passano per l'origine). Si mostri che $X = \cup_n C_n$ è connesso (questo spazio si chiama *orecchino hawaiano*). E' connesso per archi?

Soluzione:

Osserviamo che le circonferenze C_n sono connesse per archi in quanto quozienti di spazi connessi per archi ($C_n \approx \frac{[0,\frac{1}{n}]}{\sim_n}$ con $x \sim_n y$ se e solo se $x = y$ oppure $x = 0$ e $y = \frac{1}{n}$ o viceversa). Lo spazio X è dunque connesso per archi (e quindi connesso) perché è unione di spazi connessi per archi aventi in comune il punto $(0, 0)$.

10. Dimostrare che $\mathbb{Q}$ e $X = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$ non sono omeomorfi, pur essendo entrambi numerabili e totalmente sconnessi.

    Soluzione:

    I due spazi non sono omeomorfi perchè X è compatto mentre $\mathbb{Q}$ non lo è. Infatti, $\mathbb{Q}$ non è compatto in quanto si possono trovare successioni che non ammettono sottosuccessioni convergenti. Basta considerare una successione x_n che converge ad un numero irrazionale r; in tal caso ogni sottosuccessione di x_n tenderà ad r e dunque non convergerà in $\mathbb{Q}$.
    Dimostriamo ora la compattezza di X. Dato $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X esisterà un i tale che $0 \in U_i$. Prendiamo la successione $x_n = \frac{1}{n}$, essa converge a 0 e dunque per ogni intorno aperto V che contiene 0 esiste $\overline{n}$ per cui $\forall n \geq \overline{n}$ si ha che $x_n \in V$. Abbiamo quindi che esiste $\tilde{n}$ per cui $\forall n \geq \tilde{n}$ $x_n \in U_i$ e quindi possiamo prendere come sottoricoprimento finito $U_i \cup \{U_j : x_k \in U_j \; \exists 1 \leq k \leq \tilde{n}\}$.