Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Tutorato 5 (8 Aprile 2013)

Proprietà di separazione & Topologia quoziente

1. Dimostrare che l'essere T_1 (rispettivamente T_2) è una proprietà topologica per uno spazio X.

   Soluzione:

   L'asserto segue dimostrando che l'essere T_1 (risp. T_2) è una proprietà invariante per omeomorfismo.

   Siano X e Y due spazio omeomorfi e sia $g : X \to Y$ un omeomorfismo; mostriamo che X è T_1 (risp. T_2) $\Leftrightarrow$ Y è T_1 (risp T_2).
   Osserviamo, inoltre, che è sufficiente dimostrare una delle due implicazioni poiché l'inversa di un omeomorfismo è ancora un omeomorfismo.

   T_1 Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio $T_1 \Rightarrow \forall\, x \in X, \{x\}$ è chiuso. Sia $y \in Y \Rightarrow \exists\, x \in X$ tale che $g(x) = y$. Essendo g un'applicazione chiusa segue che $\{y\}$ è chiuso in $Y \Rightarrow Y$ è T_1.

   T_2 Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio T_2.
   Siano y_1,$y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Consideriamo $x_1 := g^{-1}(y_1)$ e $x_2 := g^{-1}(y_2)$; è chiaro che $x_1 \neq x_2$. Esistono, allora, per ipotesi, due aperti $U_X, V_X \subset X$ tali che $x_1 \in U_X$, $x_2 \in V_X$ e $U_X \cap V_X = \emptyset$. Siano, ora, $U_Y := g(U_X)$ e $V_Y := g(V_X)$; si ha: $y_1 \in U_Y$, $y_2 \in V_Y$ con U_Y, V_Y aperti in Y (g è aperta in quanto omeomorfismo) e $U_Y \cap V_Y = \varnothing$. Infatti: se, per assurdo, esistesse $z \in U_Y \cap V_Y \Rightarrow g^{-1}(z) \in g^{-1}(U_Y \cap V_Y) = g^{-1}(U_Y) \cap g^{-1}(V_Y) = U_X \cap V_X = \varnothing$: contraddizione. Segue la tesi.

2. Dimostrare che uno spazio X è di Hausdorff se e solo se la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$.

   Soluzione:

   $\Rightarrow$: Supponiamo che X sia di Hausdorff.
   Mostriamo che Δ^c è aperto in $X \times X$ verificando che tutti i suoi punti sono interni. Siano $x, y \in X$ tali che $(x, y) \in \Delta^c \Rightarrow x \neq y$. Per ipotesi, esistono due aperti $U, V \subset X$ tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$. Chiaramente $U \times V$ è un aperto di $X \times X$ che contiene il punto (x, y); sarà dunque sufficiente far vedere che $U \times V \subset \Delta^c$o equivalentemente che $U \times V \cap \Delta = \varnothing$. Se, per assurdo, esistesse $(x', y') \in U \times V \cap \Delta \Rightarrow x' \in U, y' \in V$ e $x' = y' \Rightarrow x' \in U \cap V = \varnothing$: contraddizione.

   $\Leftarrow$: Supponiamo che Δ sia chiusa (ovvero Δ^c aperto). Siano $x, y \in X$ con $x \neq y \Rightarrow (x, y) \notin \Delta$ ovvero $(x, y) \in \Delta^c$. Essendo Δ^c aperto $\exists U, V$ aperti di X tali che $(x, y) \in U \times V \subset \Delta^c \Rightarrow x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$. Infatti: se, per assurdo, esistesse $z \in U \cap V \Rightarrow (z, z) \in U \times V \subset \Delta^c$: assurdo.

3. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione d'insiemi; il grafico di f è

   $$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\} \subsetneq X \times Y.$$

   Dimostrare che se X e Y sono spazi topologici, Y di Hausdorff, ed f è continua, il grafico Γ_f è chiuso in $X \times Y$. Dare un esempio in cui Y non è Hausdorff e Γ_f non è chiuso.

   Soluzione:

   Mostreremo che Γ_f^c è aperto in $X \times Y$.
   Sia $(x, y) \in \Gamma_f^c \Rightarrow y \neq f(x) \Rightarrow$ esistono due aperti $U, V \subset Y$ tali che $y \in U$, $f(x) \in V$ e $U \cap V = \varnothing$. Sia $A := f^{-1}(V)$: $x \in A$ ed, essendo f continua, A è aperto in X. Consideriamo l'aperto $A \times U$ di $X \times Y$; è chiaro che $(x, y) \in A \times U$. Per la tesi rimane da far vedere che $A \times U \subset \Gamma_f^c$.
   Infatti: se, per assurdo, esistesse $(x', y') \in (A \times U) \cap \Gamma_f \Rightarrow y' = f(x') \in f(A) = f(f^{-1}(V)) \subset V \Rightarrow$

$y' \in U \cap V = \varnothing$: assurdo.

Si considerino gli insiemi $X = Y = \{a, b, c\}$ dotati rispettivamente delle topologie $\mathcal{T}_X = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ e $\mathcal{T}_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}\}$ e la funzione $f : X \to Y$ tale che $f(a) = f(b) = f(c) = a$.
L'applicazione f è continua perché $f^{-1}(\{a\}) = X$ e Y non è di Hausdorff perché se consideriamo ad esempio i punti c e a abbiamo che l'unico intorno di c è Y stesso e dunque non sarà mai disgiunto da un intorno di a.
Il grafico di f è $\Gamma_f = \{(a, a), (b, a), (c, a)\} = \{a, b, c\} \times \{a\}$ che non è chiuso perché $\Gamma_f^c = \{a, b, c\} \times \{b, c\}$ non è aperto nella topologia prodotto di $X \times Y$.

4. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ lo spazio topologico indotto dalla distanza $\underline{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$\underline{d}(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

   (a) Verificare che la successione $\{\frac{n}{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 1 in $(\mathbb{R}, \underline{d})$.

   (b) Verificare che la successione $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non converge in $(\mathbb{R}, \underline{d})$.

   <u>*Soluzione*</u>:

   (a) Sia $x_n := \frac{n}{n+1}$; per provare l'asserto mostriamo che fissato $\epsilon > 0 \ \exists \, n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_\epsilon} \in D_\epsilon(1)$. Osserviamo che:

$$\underline{d}(x_n, 1) = \underline{d}\left(\frac{n}{n+1}, 1\right) = \left| \frac{\frac{n}{n+1}}{1 + |\frac{n}{n+1}|} - \frac{1}{1 + |1|} \right| = \left| \frac{1}{2(2n+1)} \right| = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

   Ne segue che, scelto $n_\epsilon > \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$, si ha che, per ogni $n > n_\epsilon, \underline{d}(x_n, 1) = \frac{1}{2(2n+1)} < \epsilon$ cioè $x_{n_\epsilon} \in D_\epsilon(1)$.

   (b) Sia $x_n := n$. Supponiamo, per assurdo, che x_n converga ad $a \in \mathbb{R}$. In tal caso, risulterebbe che la successione $\{\underline{d}(x_n, a)\}$ è convergente a 0 in $(\mathbb{R}, d)$ dove d è la metrica euclidea di $\mathbb{R}$. Ora:

$$\underline{d}(x_n, a) = \underline{d}\,(n, a) = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{a}{1 + |a|} \right|;$$

   Notiamo che: $\frac{a}{1+|a|} < 1$. Pertanto si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \underline{d}(x_n, a) = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n}{n+1} - \frac{a}{1 + |a|} \right| = \left| \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} - \frac{a}{1 + |a|} \right| = \left| 1 - \frac{a}{1 + |a|} \right| = 1 - \frac{a}{1 + |a|} < 0$$

   Dunque,$\{d(x_n, a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ non converge a 0 e si ha un assurdo.

5. Consideriamo $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea e la relazione di equivalenza relativa al sottoinsieme $\mathbb{Q}$, ovvero $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Q}$.

   (a) Mostrare che lo spazio quoziente $X := \mathbb{R}/\sim$ non è T_1;

   (b) Dire quali dei seguenti insiemi sono aperti della topologia quoziente:

      i. $p(-\pi, \pi)$ dove p indica la proiezione al quoziente;

      ii. $X \setminus \mathbb{Q}$;

      iii. $p(\mathbb{R} \setminus \{\pi + n : n \in \mathbb{N}\})$.

   (c) Sia $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una numerazione di $\mathbb{Q}$. Consideriamo l'aperto U di $\mathbb{R}$ così definito:

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{1/2^{n+1}}(q_n).$$

   Dimostrare che U è un aperto saturo e che il suo complementare ha cardinalità non numerabile.

   (d) Mostrare che X non ha base locale numerabile.

   <u>*Soluzione*</u>:

   (a) Sia $[\mathbb{Q}]$ la classe dei numeri razionali, essa rappresenta un punto dello spazio quoziente, ma non è chiuso. Infatti: $p^{-1}([\mathbb{Q}]) = \mathbb{Q}$ che non è chiuso in quanto, ad esempio, non contiene il limite della successione $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$;

(b)
  i. Non è aperto perché $p^{-1}(p(-\pi,\pi)) = \mathbb{Q} \cup (-\pi,\pi)$ che non è aperto, perché $\mathbb{Q}$ non è aperto;
  ii. Non è aperto perché $p^{-1}(X \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ che non è aperto, se lo fosse $\mathbb{Q}$ sarebbe chiuso;
  iii. É aperto perché $p^{-1}(p(\mathbb{R} \setminus \{\pi + n | n \in \mathbb{N}\})) = \mathbb{R} \setminus \{\pi + n | n \in \mathbb{N}\}$ è il complementare di un chiuso.

(c) Abbiamo che U è aperto perchè è unione di dischi aperti, è saturo perché contiene $\mathbb{Q}$.