Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

TUTORATO 4 (18 MARZO 2013)
TOPOLOGIA QUOZIENTE & IDENTIFICAZIONI

1. Sia $X = \{a, b, c, d\}$ con la topologia $\mathcal{T} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, X, \emptyset\}$ mentre $Y = \{u, v, w\}$, sia data l'applicazione $f : X \to Y$ tale che $f(a) = f(b) = u, f(c) = v, f(d) = w$. Si individui la topologia quoziente rispetto a f.

   Soluzione:

   Ricordiamo che un sottoinsieme $S \subset Y$ è aperto rispetto alla topologia quoziente se $f^{-1}(S)$ è aperto in X. Quindi, la topologia quoziente è data da $\{\{u\}, \{w, v\}, Y, \emptyset\}$; infatti $\{a, b\} = f^{-1}(\{u\})$ e $\{c, d\} = f^{-1}(\{v, w\})$.

2. Dimostrare che valgono le seguenti inclusioni per l'applicazione $f : X \to Y$ di insiemi non vuoti e per sottoinsiemi A e B di X:

   (a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
   (b) $Y \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$

   Si diano degli esempi in cui vale l'inclusione propria. Si dimostri che in (b) vale l'uguale $\Leftrightarrow A$ è saturo rispetto a f.

   Soluzione:

   (a) Sia $y \in f(A \cap B)$ allora esiste $x \in A \cap B$ tale che $f(x) = y$; quindi $y \in f(A) \cap f(B)$.
   (b) Sia $y \in Y \setminus f(A)$ allora $y \notin f(A)$. Si ha che $f^{-1}(y) = \emptyset$ (non c'è nulla da provare) o esiste $x \in X \setminus A$ tale che $f(x) = y$; ma allora $x \in f(X \setminus A)$.

   Si ponga $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ e $f : X \to Y$ tale che $f(1) = a$, $f(2) = f(3) = b$ e $f(4) = c$. Si ha che $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ mentre $f(A) \cap f(B) = \{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$. Siano $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2\}$ e $f : X \to Y$ tale che $f(1) = f(2) = f(3) = b$, $f(4) = c$ e $f(5) = a$. Allora $\{a, c\} = Y \setminus f(A) \subsetneq f(X \setminus A) = Y$.

   Dimostriamo infine che $A \subseteq X$ è saturo rispetto ad $f \Leftrightarrow Y \setminus f(A) = f(X \setminus A)$.
   Ricordiamo che un aperto A si dice saturo rispetto a f se e soltanto se $f^{-1}(f(A)) = A$ se e soltanto se per ogni $x \in X$ tale che $f(x) \in f(A)$ allora $x \in A$.

   $\Rightarrow$: Facciamo vedere che $Y \setminus f(A) \supseteq f(X \setminus A)$. Se per assurdo esistesse $y \in f(X \setminus A)$ tale che $y \notin Y \setminus f(A)$ allora $y \in f(A) \Rightarrow f^{-1}(y) \in f^{-1}(f(A)) = A$. ASSURDO!
   $\Leftarrow$: Dimostriamo che A è un aperto saturo. Sia $x \in X$ tale che $f(x) \in f(A)$; se per assurdo $x \notin A$ allora $f(x) \in f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$. Da cui $f(x) \notin f(A)$. ASSURDO!

3. Sia $f : X \to Y$ un'identificazione, $B \subseteq Y$ un sottospazio aperto e $A = f^{-1}(B) \subseteq X$. Dimostrare che l'applicazione $g : A \to B$ indotta da f è un'identificazione.

   Soluzione:

   Osserviamo innanzitutto che, essendo g indotta da f, si ha $g(x) = f(x) \, \forall \, x \in A$.
   Affinché g sia un'identificazione sarà sufficiente dimostrare che g è suriettiva e che B è dotato della topologia quoziente rispetto a g (la continuità di g seguirà direttamente da quest'ultimo fatto).

   - g è suriettiva:
     $g(A) = f(A) = f(f^{-1}(B)) = B$ (l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che, essendo f suriettiva, ammette un'inversa a destra).

- B ha la topologia quoziente rispetto a g:

  Dobbiamo dimostrare che:

  $$B_1 \subseteq B \text{ è aperto } \Leftrightarrow g^{-1}(B_1) \text{ è aperto in } A$$

  $\Rightarrow$: Sia $B_1 \subseteq B$ aperto in $B \Rightarrow B_1 = B \cap A_Y$ con $A_Y \subseteq Y$ aperto in Y.

  $$g^{-1}(B_1) = g^{-1}(B \cap A_Y) = f^{-1}(B \cap A_Y) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(A_Y) = A \cap f^{-1}(A_Y)$$

  Ora f è un'identificazione (in particolare f è continua); essendo $A_Y \subseteq Y$ aperto in Y segue che $f^{-1}(A_Y) \subseteq X$ è aperto in X.
  Otteniamo dunque che $g^{-1}(B_1)$ è aperto nella topologia di sottospazio di A in X.

  $\Leftarrow$: Sia $g^{-1}(B_1) \subseteq A$ aperto in A; allora:

  $g^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_1) = A \cap A_X$ con $A_X \subseteq X$ aperto in X.
  Ora, per ipotesi, abbiamo che $A = f^{-1}(B)$, con B aperto in Y; dalla continuità di f, segue che A è aperto in X, da cui $g^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_1)$ è aperto in X perché intersezione finita di aperti di X.
  Inoltre, poiché f è un'identificazione, sappiamo che:

  $$f^{-1}(B_1) \text{ è aperto in } X \Leftrightarrow B_1 \text{ è aperto in } Y.$$

  Possiamo concludere che B_1 è aperto in Y e conseguentemente in B, poiché $B_1 = B \cap B_1$ con B_1 aperto in Y.

4. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$

   $$X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}, \quad Y = \{(x, y) : xy = 0\}.$$

   Sia $p : X \to Y$ tale che $p(x, 0) = (x, 0)$ e $p(x, 1) = (0, x)$, si dimostri che p è un'identificazione.
   Soluzione:

   Poniamo $X_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $X_2 = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$.
   L'applicazione p è suriettiva per costruzione. Possiamo considerare p come l'incollamento di $p_1 : X_1 \to Y$ tale che $p_1(x, 0) = (x, 0)$ e $p_2 : X_2 \to Y$ tale che $p_2(x, 1) = (0, x)$. Le applicazioni p_1 e p_2 sono continue e la loro intersezione è vuota.
   Per concludere mostriamo che l'immagine di ogni aperto saturo è aperta. In primo luogo osserviamo che se A è un aperto saturo, $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \bigcup\{tp + (1-t)q : p, q \in X_1 \text{ e } t \in (0, 1)\}$ e $A_2 = \bigcup\{tp+(1-t)q : p, q \in X_2 \text{ e } t \in (0, 1)\}$ tali che $(0, 0) \notin A_1$ e $(0, 1) \notin A_2$ oppure $(0, 0), (0, 1) \in A$. Infatti, qualora A_1 contenesse $(0, 0)$ e $(0, 1) \notin A_2$ si avrebbe che $p^{-1}(A_1) = A_1 \cup (0, 1) \not\subset A$ da cui discenderebbe che A è non saturo. Si procede allo stesso modo nel caso in cui $(0, 1) \in A_2$ e $(0, 0) \notin A_1$.
   Ora sia A saturo, $p(A) = p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) \cup p(A_2) = p_1(A_1) \cup p_2(A_2)$. Siccome p_1 e p_2 sono omeomorfismi, segue la tesi.

5. Uno *spazio topologico puntato* è una coppia (X, p) dove X è uno spazio topologico e p è un punto di X. Siano (X, p) e (Z, q) spazi puntati, definiamo l'*incollamento* di (X, p) e (Z, q) come

   $$X \amalg Z/\sim \quad \text{con} \quad a \sim b \Leftrightarrow \ a = b \text{ oppure } a = p\ , b = q; \text{ oppure } a = q\ , b = p$$

   Dimostrare che nell'esercizio precedente $Y \approx X_1 \amalg X_2/\sim$ dove $X_1 = \{(x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ e $X_2 = \{(x, 1) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$.
   Soluzione:

   Consideriamo gli spazi puntati $(X_1,(0, 0))$ e $(X_2,(0, 1))$ e la mappa p definita nell'esercizio precedente. Sia $\overline{p} : X_1 \amalg X_2/\sim \to Y$ la mappa che agisce sulle classi d'equivalenza dell'incollamento $X_1 \amalg X_2/\sim$ nel seguente modo

   $$\overline{p}([(x, 0)]_\sim) := (x, 0); \quad \overline{p}([(x, 1)]_\sim) := (0, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   L'applicazione $\overline{p}$ è ben definita; infatti, siano $a, b \in X$, se $[a]_\sim = [b]_\sim$ allora si hanno due casi

- $[a]_\sim = [b]_\sim \neq [(0,1)]_\sim, [(0,0)]_\sim$ implica $a = b$ da cui $\overline{p}([a]_\sim) = p(a) = p(b) = \overline{p}([b]_\sim)$;
- se $[a]_\sim = [b]_\sim = [(0,0)]_\sim$. Allora si può avere soltanto $a = (0,0) = b$ o $a = (0,1) = b$ o $a = (0,0)$ e $b = (0,1)$ o $a = (0,1)$ e $b = (0,0)$. Se $a = b$ non c'è niente da dimostrare. Se $a \neq b$ e ad esempio $a = (0,0)$, $b = (0,1)$ allora $\overline{p}([a]_\sim) = \overline{p}([(0,0)]_\sim) = p(0,0) = (0,0) = p(0,1) = \overline{p}([(0,1)]_\sim) = \overline{p}([b]_\sim)$.

Per le proprietà di p, $\overline{p}$ è suriettiva ed inoltre poiché $(0,1)$ e $(0,0)$ sono nella stessa classe $\overline{p}$ è anche iniettiva. Per dimostrare che $\overline{p}$ è un omeomorfismo utilizziamo la seguente proposizione.

Sia $p : X \to Y$ un' identificazione e Z uno spazio topologico. Un'applicazione $g : Y \to Z$ è un omeomorfismo se e solo se è biettiva e $g \circ p$ è un'identificazione

Abbiamo che $p : X_1 \cup X_2 = X \to Y$ è un'identificazione per quanto dimostrato nell'esercizio precedente. L'applicazione $\overline{p} \circ p$ è suriettiva perché composizione di applicazioni suriettive, è continua perché p e $\overline{p}$ sono continue ed è un'identificazione perché su $X_1 \amalg X_2/\sim$ è definita la topologia quoziente. Alternativamente si poteva osservare che $\overline{p} \circ p$ è un'identificazione perché è la proiezione al quoziente di $X_1 \cup X_2$ rispetto a $\sim$.

6. Sia X lo spazio ottenuto identificando a un punto il sottospazio $\{0,1\}$ di $[0,1]$, dimostrare che $X \approx S^1$.

   <u>Soluzione</u>:

   Per la risoluzione di questo esercizio sarà sufficiente applicare la proposizione sopracitata agli spazi $[0,1]$, $[0,1]/\sim$ e S^1 nel seguente modo. Siano $p : [0,1] \to S^1$ tale che $p(x) = e^{2\pi i x}$ per ogni $x \in [0,1]$, $g : S^1 \to [0,1]/\sim$ tale che, denotando i punti s di S^1 con $e^{2\pi i x}$ (con abuso di notazione) $g(s) = g(e^{2\pi i x}) = [x]_\sim$. L'applicazione p è un'identificazione mentre g è biiettiva. Dunque $p \circ g : [0,1] \to [0,1]/\sim$ essendo la proiezione al quoziente è un'identificazione.

7. Sia $X = \mathbb{R}$, sia $S := \{1,2,3\} \cup (4,5)$ e sia ρ la relazione d'equivalenza così definita:

   $$x \rho y \Leftrightarrow x = y \quad \text{oppure} \quad x, y \in S.$$

   Verificare che la proiezione sul quoziente $p : X \to X/\rho$ non è nè aperta nè chiusa.

   <u>Soluzione</u>:

   Per verificare che p non è aperta (risp. chiusa), basterà trovare un aperto (risp. un chiuso) di $\mathbb{R}$ tale che la sua immagine attraverso p non sia un aperto (risp. un chiuso) nella topologia quoziente X/ρ.

   Consideriamo $A = (1,3)$ e $C = [1,3]$ rispettivamente aperto e chiuso di $\mathbb{R}$. Si ha:

   $p(A) = p(C) = \{[1]_\rho, [x]_\rho, x \in (1,2) \cup (1,3)\}$.

   Mostriamo che $p(A) = p(C)$ non è nè aperto nè chiuso, ovvero, per definizione di topologia quoziente, che $B := p^{-1}(p(A)) = p^{-1}(p(C))$ non è nè aperto nè chiuso in $\mathbb{R}$; infatti:

   $B = [1,3] \cup (4,5)$

   non è nè aperto nè chiuso in $\mathbb{R}$ in quanto $\mathrm{Int}B = (1,3) \cup (4,5) \subsetneq B \subsetneq [1,3] \cup [4,5] = \overline{B}$.

8. Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$ e siano $\gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + y^2 = 1\}$ e $\gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 = 1\}$. Sia $Y = \gamma_1 \cup \gamma_2$ e X/ρ_Y il quoziente di X ottenuto identificando Y a un punto (ovvero quozientando X rispetto alla relazione di equivalenza ρ_Y tale che $x \,\rho_Y\, y \Leftrightarrow x = y$ oppure $x, y \in Y$). Dire se la proiezione $p : X \to X/\rho_Y$ è aperta o non aperta, chiusa o non chiusa.

   <u>Soluzione</u>:

- p è chiusa:
  Osserviamo innanzitutto che γ_1 e γ_2 sono chiusi in X, in quanto chiusi in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow Y = \gamma_1 \cup \gamma_2$ è chiuso in X.
  Sia C un chiuso di X; consideriamo due casi:

  - $C \cap Y = \emptyset \Rightarrow p^{-1}(p(C)) = C$ è chiuso in $X \Rightarrow p(C)$, per definizione di topologia quoziente, è chiuso in X/ρ_Y;

  - $C \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow p^{-1}(p(C)) = C \cup Y$ è chiuso in $X \Rightarrow p(C)$, per definizione di topologia quoziente, è chiuso in X/ρ_Y.

  In ogni caso l'immagine di un chiuso è chiusa.

- p non è aperta:
  Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + y^2 \leq 1\} = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + y^2 < 2\} \Rightarrow A$ è aperto in X. Si ha:

  $p^{-1}(p(A)) = A \cup \gamma_2$ non è aperto in $X \Rightarrow p(A)$ non è aperto in X/ρ_Y.

9. Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X e sia χ_S la funzione caratteristica di S. Dimostrare che χ_S è continua in p se e soltanto se $p \notin Fr(S)$.

   Soluzione:

   La funzione χ_S è continua in p se per ogni intorno J di $f(p)$ esiste un intorno I di p tale che $f(I) \subset J$. Se $p \notin \mathrm{Fr}(S)$ allora p è un punto interno o esterno, quindi esiste un intorno I di p tutto contenuto nell'interno di S (rispettivamente nell'esterno di S). Si ha che $f(I) = \{1\}$ (rispettivamente $f(I) = \{0\}$). Poiché ogni intorno J di $f(p)$ è un intorno di 0 (rispettivamente di 1), $f(I) \subset J$ per ogni intorno J di $f(p)$.
   Se invece $p \in \mathrm{Fr}(S)$ allora in ogni intorno I di p ci sono punti dell'interno e dell'esterno di S quindi $f(I) = \{1, 0\}$. Se $p \in S$ preso l'aperto $J = D_{\frac{1}{2}}(0)$ allora $f(I) \not\subset J$, se viceversa $p \notin S$ sarà sufficiente scegliere $J = D_{\frac{1}{2}}(1)$ per ottenere $f(I) \not\subset J$. Segue che χ_S non è continua in p.

10. Trovare un esempio di applicazione continua $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$, determinando opportunamente per ciascun caso $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$, tale che:

    (a) f sia aperta e non chiusa;
    (b) f sia chiusa e non aperta;
    (c) f sia chiusa e aperta;
    (d) f non sia né aperta né chiusa.

    Soluzione:

    La continuità delle seguenti applicazioni è ovvia poiché la topologia dello spazio di partenza è quella discreta.

    (a) $X = Y = \{a, b\}$, $\quad \mathcal{T}_X$ la topologia discreta, $\quad \mathcal{T}_Y := \{\{\varnothing\}, \{a\}, \{a, b\}\}$ $\quad$ ed $\quad f \equiv a$.

    L'applicazione è aperta poichè $\forall\, A$ aperto di X si ha che $f(A) = \{a\}$ è aperto in Y.
    Non è chiusa poiché, preso ad esempio $\{b\}$ chiuso in X, $f(\{b\}) = \{a\}$ che non è chiuso in Y in quanto $\{a\}^c = \{b\}$ non è aperto;

    (b) $X = Y = \{a, b\}$, $\quad \mathcal{T}_X$ la topologia discreta, $\quad \mathcal{T}_Y := \{\{\varnothing\}, \{a\}, \{a, b\}\}$ $\quad$ ed $\quad f \equiv b$.

    L'applicazione è chiusa poichè $\forall\, C$ chiuso di X si ha che $f(C) = \{b\}$ è chiuso in Y in quanto $\{b\}^c = \{a\}$ è aperto in Y.
    Non è aperta poiché, preso ad esempio $\{a\}$ aperto in X, $f(\{a\}) = \{b\}$ non è aperto in Y;

    (c) $X = Y$, $\quad \mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y$ $\quad$ e $\quad f(x) = x \;\; \forall x \in X$.

    In particolare, l'applicazione è un omeomorfismo quindi è sia chiusa che aperta;

(d) $X = Y$ (aventi almeno due punti), $\mathcal{T}_X$ la topologia discreta, $\mathcal{T}_Y$ la topologia banale e $f(x) = x \ \ \forall x \in X$.

Preso qualsiasi $\{x\} \in X$, $\{x\}$ è aperto (risp. chiuso) in X ma $f(\{x\}) = \{x\}$ non è aperto (risp. non è chiuso) in Y.