Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Tutorato 10 (20 Maggio 2013)
Gruppo fondamentale

1. Sia $X = (S^1 \times I)/\rho$ dove ρ è la relazione di equivalenza che identifica $X \times \{1\}$ ad un punto. Dire quali tra gli spazi
$$X, \quad S^1, \quad S^1 \times I, \quad S^1 \times S^1$$
sono omotopicamente equivalenti.

<u>*Soluzione:*</u>

Ricordiamo la seguente proposizione

Siano X e Y spazi topologici e $\varphi : X \to Y$ un'equivalenza omotopica. Allora $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ è un isomorfismo per ogni $x_0 \in X$.

In primo luogo osserviamo che possiamo calcolare il gruppo fondamentale dei sottospazi $X, S^1, S^1 \times I, S^1 \times S^1$ poiché sono tutti connessi per archi. Ora
$$\pi_1(X) \cong \{[1]\}, \qquad \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$
$$\pi_1(S^1 \times I) \cong \mathbb{Z} \times \{[1]\} \cong \mathbb{Z}$$
$$\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$
Dunque, per la proposizione sopra citata, possiamo affermare che $S^1 \not\simeq S^1 \times S^1 \not\simeq X$.

I sottospazi S^1 e $S^1 \times I$ sono omotopicamente equivalenti.

Per costruire l'omotopia tra i due sottospazi, identifichiamo S^1 con la circonferenza contenuta in $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ centrata nell'origine e di raggio unitario e I con il segmento di $\mathbb{R}^3$ di estremi $(0,0,0), (0,0,1)$. Ora consideriamo la mappa $g : S^1 \times I \to S^1$ con $g(x,y,z) = (x,y,0)$ e l'inclusione $i : S^1 \to S^1 \times I$. Si avrà che $g \circ i = id_{S^1}$ mentre $i \circ g \simeq id_{S^1 \times I}$ attraverso l'omotopia $F : (S^1 \times I) \times I \to S^1 \times I$ tale che $F((x,y,z),t) = (x,y,tz)$ per ogni $(x,y,z) \in S^1 \times I$.

Ovviamente F è continua, $F((x,y,z),0) = (i \circ g)(x,y,z)$ e $F((x,y,z),1) = id_{S^1 \times I}$. Inoltre, F è ben definita in quanto $F((x,y,z),t) = (x,y,tz) \in S^1 \times I$ per ogni $(x,y,z) \in S^1 \times I$ poiché $0 \leq tz \leq 1$.

Rimane da dimostrare che $\pi_1(X) \cong \{[1]\}$. Per calcolare il gruppo fondamentale di X in primo luogo osserviamo che X è omeomorfo a un cono $\mathcal{C}$ con vertice nel punto $(0,0,1)$ e avente per base la circonferenza unitaria centrata nell'origine e contenuta nel piano xy. Per dimostrare ciò si consideri l'applicazione
$$f : S^1 \times I \to \mathcal{C} \text{ tale che } f(x,y,z) = (x(1-z), y(1-z), z) \text{ per ogni } (x,y,z) \in S^1 \times I.$$
e il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& S^1 \times I \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f = g \circ \pi"] & \\
\dfrac{S^1 \times I}{\rho} \arrow[rr, "g"'] & & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

con $g([(x,y,z)]_\rho) = [(x(1-z), y(1-z), z)]$ per ogni $[(x,y,z)]_\rho \in \frac{S^1 \times I}{\rho}$.

Ora $S^1 \times I$ è compatto, $\mathcal{C}$ è di Hausdorff e dunque f è un'applicazione chiusa; inoltre, f è continua e suriettiva quindi è un'identificazione. Dunque, siccome g è biettiva, g è l'omeomorfismo cercato.

Dopodiché osserviamo che ogni sottospazio stellato di $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso. L'asserto seguirà dal fatto che il cono è un sottospazio stellato di $\mathbb{R}^3$.

2. Si diano esempi di spazi X, Y che verificano simultaneamente le seguenti proprietà:
   - $X \subset Y$,
   - X, Y omotopicamente equivalenti,
   - X e Y non omeomorfi e non semplicemente connessi.

   Soluzione:

   Basta considerare gli spazi $X = S^1$ e $Y = S^1 \times I$

   - $S^1 \subset S^1 \times I$ identificando S^1 con la circonferenza di base (ad esempio).
   - X, Y sono omotopicamente equivalenti per l'esercizio precedente.
   - X e Y non sono omeomorfi perché se esistesse un omeomorfismo $f : X \to Y$ allora presi due punti distinti $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ di X si ha che $f(\mathbf{P}) \neq f(\mathbf{Q})$ e $f|_{X \setminus \{\mathbf{P},\mathbf{Q}\}} \to Y \setminus \{f(\mathbf{P}, f(\mathbf{Q})\})$ è un omeomorfismo; ma ciò è assurdo in quanto $X \setminus \{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\}$ è sconnesso mentre $Y \setminus \{f(\mathbf{P}), f(\mathbf{Q})\}$ è connesso per archi (quindi connesso).
   - X e Y non sono semplicemente connessi perché, per quanto visto nel primo esercizio, il loro gruppo fondamentale non è banale.

3. Sia X e Y spazi topologici tali che $Y \subset X$. Y si dice un *ritratto* di X se esiste $f : X \to Y$ continua tale che $f(y) = y \,\forall\, y \in Y$.
   Dimostrare che se Y è un ritratto di X e $y \in Y$ allora $\pi_1(Y, y)$ è isomorfo a un sottogruppo di $\pi(X, y)$.
   Dare un esempio di ritratto di X che non sia omotopicamente equivalente a X.

   Soluzione:

   Sia $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione di Y in X; allora, per definizione di ritratto, $f \circ i = id_Y$. Otteniamo pertanto il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, "id_Y"'] & & Y \end{tikzcd}$$

   a cui corrisponde il seguente diagramma di omomorfismi

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X, y) \arrow[dr, "f_*"] & \\ \pi_1(Y, y) \arrow[ur, hook, "i_*"] \arrow[rr, "id_{\pi_1(Y,y)}"'] & & \pi_1(Y, y) \end{tikzcd}$$

   Osserviamo, per prima cosa, che, essendo, i_* un omomorfismo di gruppi, $i_*(\pi_1(Y, y))$ è un sottogruppo di $\pi_1(X, y)$.
   Per la tesi è sufficiente mostrare che $i_*(\pi_1(Y, y)) \cong \pi_1(Y, y)$.

   Consideriamo l'omomorfismo $i_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, y)$. Si ha:

   - $\mathrm{Im}(i_*) = i_*(\pi_1(Y, y))$;
   - $\mathrm{Ker}(i_*) = \{[c_y]\}$; infatti, se $i_*[\alpha] = [c_y] \Rightarrow f_* \circ i_*[\alpha] = f_*([c_y]) = [c_y] \overset{f_* \circ i_* = (f \circ i)_* = id_*}{\Rightarrow} [\alpha] = [c_y]$.

   Dal primo teorema di omomorfismo concludiamo che $\mathrm{Im}(i_*) = i_*(\pi_1(Y, y)) \cong \frac{\pi_1(Y,y)}{\mathrm{Ker}(i_*)} \cong \pi_1(Y, y)$.

Diamo ora un esempio di ritratto di X che non sia omotopicamente equivalente a X.
Sia $X = S^1$ e sia $p \in X$. Allora $Y := \{p\}$ è un ritratto di X; infatti, l'applicazione

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto p \end{aligned}$$

è continua e tale che $f(p) = p$.
Tuttavia X e Y non sono omotopicamente equivalenti in quanto Y è semplicemente connesso mentre $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Sia $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione di Y in X; allora, per definizione di ritratto, $f \circ i = id_Y$. Otteniamo pertanto il seguente diagramma commutativo:

Diamo ora un esempio di ritratto di X che non sia omotopicamente equivalente a X.
Sia $X = S^1$ e sia $p \in X$. Allora $Y := \{p\}$ è un ritratto di X; infatti, l'applicazione

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto p \end{aligned}$$

è continua e tale che $f(p) = p$.
Tuttavia X e Y non sono omotopicamente equivalenti in quanto Y è semplicemente connesso mentre $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

4. Dimostrare che S^1 non è un ritratto di $\mathbb{R}^2$, ma è un ritratto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

<u>*Soluzione:*</u>

Supponiamo che S^1 sia un ritratto di $\mathbb{R}^2$, allora esiste $f : \mathbb{R}^2 \to S^1$ tale che $f \circ i = id_{S^1}$. Segue l'esistenza del diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^2 \arrow[dr, "f"] & \\ S^1 \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, "id_{S^1}"'] & & S^1 \end{tikzcd}$$

da cui discende il seguente diagramma commutativo tra i gruppi fondamentali (omettiamo il punto base poiché $\mathbb{R}^2$ e S^1 sono connessi per archi)

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(\mathbb{R}^2) \arrow[dr, "f_*"] & \\ \pi_1(S^1) \arrow[ur, hook, "i_*"] \arrow[rr, "id_{\pi_1(S^1)}"'] & & Y \end{tikzcd}$$

cioè $f_* \circ i_* = id_{\pi_1(S_1)} = id_{\mathbb{Z}}$. Questo è assurdo perché $\pi_1(\mathbb{R}^2)$ è banale.
S^1 è invece un ritratto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in quanto l'applicazione $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to S^1$ con $g(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{||\underline{x}||}$ soddisfa le proprietà richieste.

5. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi

$$A = \{(X,Y,Z) : X^2 + Y^2 = 1, Z = 0\}, \quad B = \{(X,Y,Z) : X^2 + Y^2 = e^{-Z}\} \text{ e}$$

$$C = \{(X,Y,Z) : X = Y = 0\}.$$

Dimostrare che:

(i) A e B sono omotopicamente equivalenti ma non sono omeomorfi;

(ii) A e C (o B e C) non sono omotopicamente equivalenti.

Si consideri ora il sottospazio $D = B \cap \{X = 0, Y < 0\}$ e si dica se sussistono equivalenze omotopiche tra A e D o tra C e D.

Soluzione:

(i) In primo luogo osseviamo che A e B non sono omoeomorfi perché A è compatto mentre B non lo è in quanto non limitato.
Ora consideriamo le seguenti applicazioni

$$i : A \to B, \quad f : B \to A \text{ con } f(x, y, z) = (x\sqrt{e^z}, y\sqrt{e^z}, 0),$$

allora $f \circ i = id_A$ mentre $i \circ f \simeq id_B$. L'applicazione

$$F : B \times I \to B \text{ tale che } F((x, y, z), t) = (x\sqrt{e^{(1-t)z}}, y\sqrt{e^{(1-t)z}}, tz)$$

è un'omotopia tra $i \circ f$ e id_B; infatti, F è continua, $F((x, y, z), 0) = f(x, y, z)$ mentre $F((x, y, z), 1) = (x, y, z) = id_B(x, y, z)$. Infine F è ben definita in quanto da $F((x, y, z), t) = (x\sqrt{e^{(1-t)z}}, y\sqrt{e^{(1-t)z}}, tz)$ segue

$$x^2e^{(1-t)z} + y^2e^{(1-t)z} = e^{-z}e^{(1-t)z} = e^{-tz}$$

da cui $F(B) \subseteq B$.

(ii) A e C non sono omotopicamente equivalenti in quanto i gruppi fondamentali non sono isomorfi. Infatti, $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$ mentre $\pi_1(C) = \{[1]\}$.
Infine B e C non sono omotopicamente equivalenti perché se lo fossero, per la transitività dell'equivalenza omotopica, si avrebbe $A \simeq C$: ASSURDO!

Consideriamo ora A e D e supponiamo $A \simeq D$. Allora D sarebbe connesso per archi in quanto A lo è; ma ciò è assurdo. Si procede in maniera analoga per dimostrare che $C \not\simeq D$.

6. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che se $x_0, x_1 \in X$ appartengono alla stessa componente connessa per archi, l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ [f] &\mapsto [\alpha^0 * f * \alpha] \end{aligned}$$

è indipendente dall'arco $\alpha : I \to X$ di estremi x_0 e x_1 se e solo se $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo abeliano.
Soluzione:

$\Rightarrow$: Dobbiamo dimostrare che presi, comunque, $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X, x_0)$, si ha $\gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma_2 * \gamma_1$.
Sia α un arco di punto iniziale x_0 e punto finale x_1; poichè anche $\gamma_2 * \alpha$ ha punto iniziale x_0 e punto finale x_1, per ipotesi si ha:

$$\alpha^0 * \gamma_1 * \alpha \sim (\gamma_2 * \alpha)^0 * \gamma_1 * (\gamma_2 * \alpha) \Rightarrow \alpha^0 * \gamma_1 * \alpha \sim \alpha^0 * \gamma_2^0 * \gamma_1 * \gamma_2 * \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha * \alpha^0 * \gamma_1 * \alpha * \alpha^0 \sim \alpha * \alpha^0 * \gamma_2^0 * \gamma_1 * \gamma_2 * \alpha * \alpha^0 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_2^0 * \gamma_1 * \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 * \gamma_1 \sim \gamma_1 * \gamma_2.$$

$\Leftarrow$: Supponiamo, ora, che $\pi_1(X, x_0)$ sia un gruppo abeliano. Dimostriamo che se α_1,α_2 sono due archi di punto iniziale x_0 e punto finale x_1 allora, per ogni $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, si ha $[\alpha_1^0 * \gamma * \alpha_1] = [\alpha_2^0 * \gamma * \alpha_2]$ ovvero $\alpha_1^0 * \gamma * \alpha_1 \sim \alpha_2^0 * \gamma * \alpha_2$.
Dato che $\pi_1(X, x_0)$ è commutativo e $\alpha_2 * \alpha_1^0$ è un cappio di base x_0, si ha:

$$\gamma * (\alpha_2 * \alpha_1^0) \sim (\alpha_2 * \alpha_1^0) * \gamma \Rightarrow \gamma * \alpha_2 * \alpha_1^0 * \alpha_1 \sim \alpha_2 * \alpha_1^0 * \gamma * \alpha_1 \Rightarrow \gamma * \alpha_2 \sim \alpha_2 * \alpha_1^0 * \gamma * \alpha_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2^0 * \gamma * \alpha_2 \sim \alpha_1^0 * \gamma * \alpha_1.$$