Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2012/2013
GE220 – Topologia
Appello C

Cognome e nome ______________________ **Identificativo**_________

Esercizio 0. Il candidato risolva le seguenti questioni.

(i) Si ponga $X := \{1,2,3,4\}, Y := \{1,2,3\}$, e si munisca l'insieme X della topologia $\mathcal{T} := \{\emptyset, X, \{1,3\}, \{2,4\}\}$. Considerata la funzione $f : X \longrightarrow Y$ definita ponendo $f(1) = f(2) := 2, f(3) = f(4) := 1$, si determini la più fine topologia su Y fra quelle che rendono f continua.

(ii) Si munisca l'insieme $I :=]0,1]$ della topologia indotta da quella euclidea di $\mathbf{R}$. Si determini una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su I in modo che $I/\mathcal{R}$ sia omeomorfo a $\mathbf{S}^1$.

(iii) Si dimostri che ogni spazio secondo numerabile è separabile.

(iv) Si dica se ogni bigezione continua $\mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^1$ è necessariamente un omeomorfismo ($\mathbf{S}^1$ ha la topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea di $\mathbf{R}^2$).

Esercizio 1. Sia X un insieme, $x_0 \in X$ un elemento fissato, si ponga

$$\mathcal{T} := \{X\} \cup \{U \subseteq X : x_0 \notin U\},$$

e si dia per buono che $\mathcal{T}$ è una topologia su X..

(i) Si descriva la chiusura, rispetto alla topologia $\mathcal{T}$, di ogni sottoinsieme di X.

(ii) Si discuta connessione e compattezza di X.

(iii) Si discutano connessione e compattezza del sottospazio $X - \{x_0\}$ di $(X, \mathcal{T})$.

(iv) Si dica se in $(X, \mathcal{T})$ vale il teorema di unicità del limite, e si dica se $(X, \mathcal{T})$ è T_1 e/o di Hausdorff.

(v) Sia adesso $x_1 \in X$ un punto distinto da x_0 e sia $\mathcal{T}' := \{X\} \cup \{U \subseteq X : x_1 \notin U\}$. Si dica se gli spazi topologici $(X, \mathcal{T}), (X, \mathcal{T}')$ sono omeomorfi e, in tale caso, si determini esplicitamente un omeomorfismo $(X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$.

Esercizio 2. Si ponga

$$Z = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -2 + \cos x \leq y \leq 2 + \cos x\}.$$

Si calcoli $\pi_1(Z, (0, 0))$. Si dica se Z è contraibile motivando la risposta.