Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2012/2013
GE220 – Topologia
Appello A

Cognome e nome ______________________ **Identificativo**_________

Avvertenza. OGNI asserzione va giustificata in modo conciso ed esauriente. Affermazioni non motivate adeguatamente non saranno prese in considerazione.

Esercizio 0. Il candidato risolva le seguenti questioni.

(i) Si discuta la compattezza dei seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^2$:
$$X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy < 1\} \qquad Y := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^4 + y^4 + 2013x^2y^2 \leq 1\}$$

(ii) Si consideri l'orecchino hawaiiano
$$\mathbf{H} := \bigcup_{n \geq 1} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$$
e si ponga
$$X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1 \text{ oppure } (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$$
Muniti $\mathbf{H}$ e X della topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea di $\mathbf{R}^2$, si dica se $\mathbf{H}$ è omeomorfo a X.

(iii) Per ogni sottoinsieme S di $\mathbf{R}$ si denoti che $\mathcal{R}_S$ la relazione di equivalenza su $\mathbf{R}$ che identifica S a un punto. Si dimostri che gli spazi quoziente $\mathbf{R}/\mathcal{R}_{]-\infty,0]}$ e $\mathbf{R}/\mathcal{R}_{[0,+\infty[}$ sono omeomorfi.

Esercizio 1. Siano X un insieme e x_0 un fissato elemento di X. Si ponga

$$\mathcal{T} := \{Y \subseteq X : x_0 \in Y\} \cup \{\emptyset\}$$

(i) Si verifichi che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.
(ii) Si mostri che $X - \{x_0\}$ è uno spazio discreto, munito della topologia di sottospazio indotta da $\mathcal{T}$.
(iii) Si dica quali assiomi di separazione vengono soddisfatti da $(X, \mathcal{T})$.
(iv) Si discuta connessione e compattezza di X.
(v) Si caratterizzino le successioni convergenti a termini in X.
(vi) Se $X := \mathbf{R}$ e x_0 è un fissato numero reale, si dica se $(X, \mathcal{T})$ è primo e/o secondo numerabile.

Esercizio 2. (a) Sia X un sottoinsieme convesso di $\mathbf{R}^2$ e si assuma che $\mathbf{x}_0$ sia un punto interno di X. Si mostri che $X - \{\mathbf{x}_0\}$ è omotopicamente equivalente a una circonferenza. [Suggerimento: a meno di effettuare una traslazione, si può assumere che $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. Si dimostri che esiste un numero reale positivo r tale che la circonferenza C di centro $(0,0)$ e raggio r sia contenuta in $X - \{(0,0)\}$. Poi si consideri la funzione continua $f : X - \{(0,0)\} \longrightarrow C$, $\mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} r$... ☺☺☺]

(b) Siano $A, B, C \in \mathbf{R}^2$ punti non allineati, sia T il triangolo pieno di vertici A, B, C, e si ponga $X := \mathrm{Int}(T)$, $Y := X \cup \overline{AB} \cup \overline{BC}$. Si stabilisca se X e Y sono omeomorfi. [Suggerimento: si usi opportunamente la parte (a)... ☺]