Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Soluzioni Tutorato 1 (25 Febbraio 2013)
Spazi metrici e topologici

1. Dato l'insieme $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ stabilire se le seguenti famiglie di sottoinsiemi di X sono topologie

   (a) $\mathcal{F} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{a, d, e, f\}, \{b, d, e, f\}, \{a, b\}, \{a, b, d, e, f\}\}$;
   (b) $\mathcal{G} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, c\}\}$;
   (c) $\mathcal{H} = \{X, \emptyset, \{a, b, d, e\}, \{d, e\}, \{f\}, \{a, b, d, e, f\}, \{d, e, f\}, \{e, f\}, \{d, f\}\}$;
   (d) $\mathcal{I} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e, f\}, \{a, b, e, f\}, \{a, b\}\}$.

   Soluzione:

   (a) La famiglia $\mathcal{F}$ è una topologia su X. Per dimostrarlo è sufficiente applicare la definizione e, cioè, verificare che l'unione di una famiglia arbitraria di elementi di $\mathcal{F}$ e l'intersezione di due elemente qualsiasi di $\mathcal{F}$ stanno in $\mathcal{F}$.
   (b) $\mathcal{G}$ non è una topologia su X perché $\{a, c\} = \{a\} \cup \{c\}$ non appartiene a $\mathcal{G}$.
   (c) La famiglia $\mathcal{H}$ non rappresenta una topologia su X perché $\{e\} = \{a, b, d, e\} \cap \{e, f\}$ non sta in $\mathcal{H}$.
   (d) $\mathcal{I}$ è una topologia su X (cfr. (a)).

2. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme di X. Verificare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

   (a) A è aperto;
   (b) $\forall\, x \in A$, esiste un disco $D_\epsilon(x)$ tale che $D_\epsilon(x) \subseteq A$;
   (c) $\forall\, x \in A$, esiste un aperto V_x tale che $x \in V_x \subseteq A$.

   Soluzione:

$(a) \Rightarrow (b)$: Per definizione, dato (X, d) spazio metrico e $A \subseteq X$, A è aperto se è unione di dischi aperti:

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha$$

Allora $\forall\, x \in A\ \exists\, \bar{\alpha} \in I$ tale che $x \in D_{\bar{\alpha}} = D_\epsilon(y) = \{z \in X |\, d(y, z) < \epsilon\}$.
Scelto dunque $\epsilon' < \min\{d(x, y), \epsilon - d(x, y)\}$ si ha $x \in D_{\epsilon'}(x) \subset D_\epsilon(y) \subset A$.
Infatti, $\forall\, x' \in D_{\epsilon'}(x)$ ($\Rightarrow d(x', x) < \epsilon'$) si ha: $d(x', y) \leq d(x', x) + d(x, y) < \epsilon' + d(x, y) < \epsilon - d(x, y) + d(x, y) = \epsilon \;\Rightarrow\; x' \in D_\epsilon(y)$.

$(b) \Rightarrow (c)$: $D_\epsilon(x)$ è un aperto tale che $x \in D_\epsilon(x) \subseteq A$; $\forall\, x \in A$ basta quindi scegliere $V_x = D_\epsilon(x)$

$(c) \Rightarrow (a)$: Sappiamo che $\forall\, x \in A$, esiste un aperto V_x tale che $x \in V_x \subseteq A$. Allora:
$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} V_x \subseteq A \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} V_x$.
V_x è aperto e quindi unione di dischi aperti. Pertanto A è unione di dischi aperti e quindi è aperto.

3. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto. Determinare l'insieme dei suoi aperti $\mathcal{A}$ e per ogni $x \in X$ l'insieme $\mathfrak{D}(x)$ dei dischi aventi centro in x.

   Soluzione:
   Ricordiamo che la distanza discreta è definita nel modo seguente:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & se\ x = y \\ 1 & se\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow D_\epsilon(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{se } \epsilon \leq 1 \\ X & \text{se } \epsilon > 1 \end{cases}.$$

   Quindi $\mathfrak{D}(x) = \{\{x\}, X\}\ \forall x \in X$.

   Descriviamo ora l'insieme degli aperti $\mathcal{A}$ di (X, d).
   Sia U un sottoinsieme di X; allora $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$, cioè U è unione dei suoi punti che, per quanto visto sopra, sono dischi. Allora U è aperto in quanto unione di dischi.
   Ne segue che ogni sottoinsieme di X è aperto, ossia $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ (insieme delle parti di X).

4. Sia (X, d) uno spazio metrico. Si verifichi che l'applicazione $\epsilon : X \times X \to \mathbb{R}$ tale per cui

$$\epsilon(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$$

   per ogni $x, y \in X$, è una distanza su X.

   Soluzione:
   Osserviamo innanzitutto che, essendo d una metrica su X, $\forall\, x, y, z \in X$ valgono le seguenti condizioni:

   (i) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
   (ii) $d(y, x) = d(x, y)$;
   (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

   Quindi:

   (i) $\forall\, x, y \in X \quad \epsilon(x, y) \geq 0$ poiché $1 \geq 0$ e $d(x, y) \geq 0$. Inoltre $\epsilon(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
   (ii) $\forall\, x, y \in X \quad \epsilon(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} = \min\{1, d(y, x)\} = \epsilon(y, x)$;
   (iii) Dimostriamo, ora, la diseguaglianza triangolare.
   $\forall\, x, y, z \in X$ $\epsilon(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \leq \min\{1, d(x, z) + d(z, y)\}$ e
   $\epsilon(x, z) + \epsilon(z, y) = \min\{1, d(x, z)\} + \min\{1, d(z, y)\}$.
   Ci basterà dunque verificare che $\min\{1, d(x, z)+d(z, y)\} \leq \min\{1, d(x, z)\}+\min\{1, d(z, y)\}$, cioè che posto $a := d(x, z)$ e $b := d(z, y)$ si abbia $\min\{1, a + b\} \leq \min\{1, a\} + \min\{1, b\}$.

   Verifichiamo la disuguaglianza nei due casi seguenti:

   - Supponiamo $1 \leq a + b \Rightarrow \min\{1, a + b\} = 1$.
     Se $a \geq 1$ allora $\min\{1, a\} + \min\{1, b\} = 1 + \min\{1, b\} \geq 1$; se $b \geq 1$ si procede allo stesso modo; se infine $a < 1$ e $b < 1$, allora $\min\{1, a\}+\min\{1, b\} = a + b \geq 1$.
   - Supponiamo $1 > a + b \Rightarrow \min\{1, a + b\} = a + b$.
     Necessariamente deve quindi essere $a < 1$ e $b < 1$. Ne segue che $\min\{1, a\} + \min\{1, b\} = a + b = \min\{1, a + b\}$.

5. Dimostrare che ogni spazio metrizzabile e finito è discreto.

   Soluzione
   Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio metrizzabile e finito; allora $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tale che esista una

distanza d su X che induca la topologia $\mathcal{T}$.
Ricordiamo che X è discreto se e solo se tutti i suoi punti sono aperti.
Sia dunque $r_{ij} := d(x_i, x_j)\ \forall\, i, j = 1, \dots, n$. Scegliendo $\epsilon < \min\{r_{ij} :\ \forall i, j = 1, \dots, n\ \ i \neq j\}$ si ha che $D_\epsilon(x_i) = \{x_i\}$, da cui segue che $\{x_i\}$ è aperto $\forall i$.

6. Assegnata una famiglia $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ di topologie su un insieme X, verificare che $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$ è una topologia su X.
Dare invece un esempio di due topologie $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ su un insieme X tali che $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ non sia una topologia.

Soluzione:
Per dimostrare che la famiglia $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$ sia una topologia su X basterà verificare:

(a) $\emptyset$ e X sono elementi di $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$;
(b) l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi di $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$ è un insieme di $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$;
(c) l'intersezione di due insiemi qualsiasi di $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$ è un insieme di $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$.

Si ha:

(a) $\emptyset$ e X appartengono a $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$ poiché $\emptyset$ e X appartengono a $\mathcal{T}_\alpha\ \forall\alpha \in I$;
(b) Sia $\{A_j\}_{j\in J}$ una famiglia qualsiasi di aperti in $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha \Rightarrow\ A_j \in \mathcal{T}_\alpha\ \forall\alpha \in I$ e $\ j \in J \Rightarrow$ $\Rightarrow\ \bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_\alpha\ \forall\alpha \in I$ poiché $\mathcal{T}_\alpha$ è una topologia su $X \Rightarrow\ \bigcup_{j\in J} A_j \in \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$;
(c) Siano A_1 e $A_2 \in \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha \Rightarrow A_1$ e A_2 appartengono a $\mathcal{T}_\alpha\ \forall\alpha \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_\alpha\ \forall\alpha \in I$ poiché $\mathcal{T}_\alpha$ è una topologia su $X\ \forall\alpha \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$.

Consideriamo ora l'insieme $X := \{a, b, c\}$ e le seguenti topologie su X :
$\mathcal{T}_1 := \{\{a\}, X, \emptyset\}$ e $\mathcal{T}_2 := \{\{b\}, X, \emptyset\}$.
Allora $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\{a\}, \{b\}, \emptyset, X\}$, ma $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.

7. Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due topologie su un insieme X, con $\mathcal{T}$ strettamente meno fine di $\mathcal{T}'$. Dimostrare che $\mathcal{T}$ non è una base della topologia $\mathcal{T}'$.

Soluzione:
Poiché $\mathcal{T}$ è strettamente meno fine di $\mathcal{T}'$, $\ \exists\, A \in \mathcal{T}'$ tale che $A \notin \mathcal{T}$. Se, per assurdo, $\mathcal{T}$ fosse una base della topologia $\mathcal{T}'$, A sarebbe unione di elementi di $\mathcal{T}$ ma, poiché $\mathcal{T}$ è una topologia, si otterrebbe che A appartieniene a $\mathcal{T}$. Ciò è assurdo; quindi $\mathcal{T}$ non può essere una base della topologia $\mathcal{T}'$.

8. Sia $\mathcal{S} := \{\mathbb{R}; \emptyset; (-\infty, a], \forall a \in \mathbb{R}\}$.

(a) Verificare che $\mathcal{S}$ non è una topologia su $\mathbb{R}$.
(b) Determinare la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ generata da $\mathcal{S}$ e confrontarla con la topologia $\mathfrak{i}_S = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

Soluzione:

(a) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $A_n := (-\infty, a - \frac{1}{n}] \in \mathcal{S}\ \ \forall\, n \geq 1\ \ \Rightarrow\ \bigcup_{n\geq 1} A_n = (-\infty, a) \notin \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}$ non è una topologia su $\mathbb{R}$.
(b) Dimostriamo, in primo luogo che, $\mathcal{S}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$, mostrando che $\mathcal{S}$ è un ricoprimento di $\mathbb{R}$ e l'intersezione di due elementi qualsiasi di $\mathcal{S}$ è unione di elementi di $\mathcal{S}$.
   - $\mathcal{S}$ è un ricoprimento di $\mathbb{R}$ poichè $\mathbb{R} \in \mathcal{S}$;

- $\forall (-\infty, a], (-\infty, b] \in \mathcal{S}$ si ha: $(-\infty, a] \cap (-\infty, b] = (-\infty, \min\{a, b\}] \in \mathcal{S}$.

Sia ora $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ la topologia generata da $\mathcal{S}$.
Come già visto $\forall a \in \mathbb{R} \quad (-\infty, a) = \bigcup_{n \geq 1} (-\infty, a - \frac{1}{n}]$ da cui $(-\infty, a) \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$.
Sia $\mathcal{T} := \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, a], (-\infty, b), \forall a, b \in \mathbb{R}\}$; è evidente che $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S})$; quindi, verificando che $\mathcal{T}$ è una topologia, necessariamente deve essere $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{S})$.
Osserviamo innanzitutto che l'intersezione tra due intervalli illimitati a sinistra (aperti o chiusi) è ancora un intervallo illimitato a sinistra.
Inoltre, $\bigcup_{i \in I} (-\infty, a_i) = (-\infty, \sup\{a_i\})$ mentre $\bigcup_{i \in I} (-\infty, a_i] = \begin{cases} (-\infty, \sup\{a_i\}) \\ (-\infty, \sup\{a_i\}] \end{cases}$, a seconda dei casi; dunque, l'unione di una famiglia qualsiasi di intervalli illimitati a sinistra è ancora un intervallo illimitato a sinistra. Infine $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Ne deduciamo che $\mathcal{T}$ è una topologia.

$\mathcal{T}$ è strettamente più fine di $\mathfrak{i}_{\mathcal{S}}$; infatti: $\forall b \in \mathbb{R} (-\infty, b) \in \mathcal{T}$, mentre $(-\infty, b] \notin \mathfrak{i}_{\mathcal{S}}$.

9. Sia $\mathcal{S} := \{\emptyset, (-\infty, 1); (a, b), \forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b\}$.
   (a) Verificare che $\mathcal{S}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$.
   (b) Verificare che la topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ generata da $\mathcal{S}$ è strettamente meno fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}$.
   (c) Per quali $a \in \mathbb{R}$, $(-\infty, a)$ è un aperto di $\mathcal{T}$?

   Soluzione

   (a) Affinché $\mathcal{S}$ sia base di una topologia su $\mathbb{R}$ bisognerà dimostrare che sia un ricoprimento di $\mathbb{R}$ e che l'intersezione di due elementi di $\mathcal{S}$ è unione di elementi di $\mathcal{S}$.
   E' facile vedere che, ad esempio, $\mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n \geq 1} (\frac{1}{2}, n)$. Inoltre, l'intersezione tra due intervalli di $\mathcal{S}$ o è vuota, nel caso in cui i due intervalli siano disgiunti, o assume una delle due forme seguenti: $(a, 1)$, se stiamo intersecando l'intervallo $(-\infty, 1)$ con un generico intervallo limitato (a, b), con $a < 1$; $(\max\{a, c\}, \min\{b, d\})$, nel caso in cui stiamo intersecanto due intervalli aperti (a, b) e (c, d) limitati a destra e a sinistra.
   (b) Indichiamo con ε la topologia euclidea. Essendo $\mathcal{S}$ costituita da intervalli aperti, allora $\mathcal{S} \subseteq \varepsilon$, da cui $\mathcal{T} < \varepsilon$. Prendendo ora, ad esempio, l'aperto $(-1, 0) \in \varepsilon$ risulta $(-1, 0) \notin \mathcal{T}$, da cui concludiamo che $\mathcal{T} \subsetneqq \varepsilon$.
   (c) $(-\infty, a) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow a \geq 1$.
   Infatti: se $a \geq 1 \;\; (-\infty, a) = (-\infty, 1) \cup (\frac{1}{2}, a) \in \mathcal{T}$. Se, viceversa, $(-\infty, a) \in \mathcal{T}$ allora necessariamente $(-\infty, a) \supset (-\infty, 1) \Rightarrow a \geq 1$.

10. Trovare uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ in cui ogni aperto sia anche chiuso, con $\mathcal{T}$ diversa dalla topologia banale o discreta.
    Se in uno spazio topologico ogni aperto è anche chiuso è altresì vero che ogni chiuso è anche aperto?

    Soluzione
    Sia $X = \{a, b, c\}$ e sia $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b, c\}, \emptyset, X\}$. E' facile verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia.
    Verifichiamo che tutti gli aperti di $\mathcal{T}$ sono chiusi, mostrando che il complementare di ciascun aperto è aperto. Si ha infatti:
    $\{a\}^c = \{b, c\} \in \mathcal{T}$, $\{b, c\}^c = \{a\} \in \mathcal{T}$, $\emptyset^c = X \in \mathcal{T}$, $X^c = \emptyset \in \mathcal{T}$.

    Sì, è vero. Infatti, supponendo che ogni aperto è chiuso, se C è un chiuso $\Rightarrow C^c$ è aperto $\Rightarrow C^c$ è chiuso $\Rightarrow (C^c)^c = C$ è aperto.