GE220 Esercizi in preparazione all'esonero di Giugno

Esercizio 1. *Sia* $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ *una forma quadratica da* $\mathbb{R}^3$ *ad* $\mathbb{R}$. *Sia* $X = \{r \in \mathbb{R}^3 : q(r) = 0\}$, *determinare se* X *e' compatto, connesso e varieta' topologica.*
Sia $Y = \{r \in \mathbb{R}^3 : q(r) = 1\}$, *determinare se* Y *e' compatto, connesso e varieta' topologica.*

Traccia di risoluzione 1. X *non e' varieta' topologica, basta verificare che non e' localmente euclideo sul punto* $(0,0,0)$.
la connessione si dimostra per archi collegando due punti x *e* y *tramite un arco di circonferenza che unisca* x *con la retta passante per* y *e l'origine.*
X *e' chiuso in* $\mathbb{R}^3$ *ma non e' limitato e quindi nemmeno compatto.*
Y *e' varieta' topologica, per dimostrarlo e' sufficiente proiettare un piccolo intorno aperto* U *di un punto su un piano passante per l'asse* z *che non intersechi* U*, in modo da avere un omeomorfismo tra* U *e un aperto del piano.*
La connessione si dimostra per archi collegando due punti x *e* y *tramite un arco di circonferenza che unisca* x *con l'arco di iperbole (contenente* y*) ottenuto intersecando* Y *con il piano passante per l'asse* z *e per* y.
Y *e' chiuso in* $\mathbb{R}^3$ *ma non e' limitato e quindi nemmeno compatto.*

Esercizio 2. *Sia* $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2z^2 = 0\}$ *e* $Z = X \cap Y$. *Determinare se tali spazi sono connessi, compatti e varieta' topologiche.*

Traccia di risoluzione 2. X *e' omeomorfo ad* S^2 *e quindi connesso, compatto e varieta' topologica,* Y *e' omeomorfo alla varieta'* Y *dell'esercizio precedente,* Z *e' costituito da due circonferenze disgiunte e quindi e' compatto, non connesso e varieta' topologica.*

Esercizio 3. *Sia* $\mathfrak{SL}(n,\mathbb{R}) = \{X \in M_{n,n} : Tr(X) = 0\}$ *Dimostrare per* $n = 2$ *che si tratta sia di un gruppo topologico rispetto all'operazione di somma coordinata per coordinata, sia di una varieta' topologica e determinarne la dimensione.*
Generalizzare i risultati precedenti per n *qualunque*

Traccia di risoluzione 3. *Per quanto riguarda l'essere un gruppo topologico la somma e' semplicemente una traslazione in* $\mathbb{R}^{n^2}$ *e quindi e' continua, inoltre scrivendo i suoi elementi come* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ *si ha un omeomorfismo tra lui ed* $\mathbb{R}^3$ *che lo rende varieta' topologica.*

Esercizio 4. *Sia X una varieta' topologica dotata di un atlante finito (U_i, ϕ_i). X e' compatto? e connesso?*
In caso di risposta negativa dare dei validi controesempi.

Traccia di risoluzione 4. *No, X puo' non essere compatto (si pensi ad $\mathbb{R}$ che ha un atlante composto da una sola mappa ma non e' compatto) e puo' anche non essere connesso (si pensi al'unione degli intervalli $(0, 1)$ e $(1, 2)$).*

Esercizio 5. *Dare un poligono che descrive $2T^2$ e calcolarne la caratteristica di eulero con una opportuna triangolazione.*

Traccia di risoluzione 5. *Descrivere $2T^2$ come quoziente dell'ottagono e dare una qualunque triangolazione.*

Esercizio 6. *Quante superfici connesse e compatte (a meno di omeomorfismo) con caratteristica di Eulero -1 esistono? e' vera la stessa risposta anche per superfici non connesse (ma sempre compatte)? in caso negativo dare almeno un esempio di superficie non connessa con $\chi = -1$.*

Traccia di risoluzione 6. *Dalla classificazione delle superfici si ha che solo $3\mathbb{P}^2$ ha caratteristica -1. Togliendo l'ipotesi di connessione si ottengono molti altri esempi con caratteristica -1, basta prendere unioni disgiunte di superfici in modo tale che la loro caratteristica abbia somma -1, come S^2 e $5\mathbb{P}^2$.*