Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

Tutorato 3 (31 Marzo 2011)

1. Sia $X = \mathbb{R}$, sia $S := \{1, 2, 3\} \cup (4, 5)$ e sia ρ la relazione d'equivalenza così definita:
$$x\rho y \Leftrightarrow x = y \quad \text{oppure} \quad x, y \in S.$$
Verificare che la proiezione sul quoziente $p : X \to X/\rho$ non è nè aperta nè chiusa.

2. Sia ρ la relazione d'equivalenza su $\mathbb{R}$ così definita:
$$x\rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$$
Dimostrare che $\mathbb{R}/\rho$ è omeomorfo alla semiretta chiusa $[0, +\infty)$.

3. Sia $f : X \to Y$ un'identificazione, $B \subseteq Y$ un sottospazio aperto e $A = f^{-1}(B) \subseteq X$. Dimostrare che l'applicazione $g : A \to B$ indotta da f è un'identificazione.

4. Sia $p : X \to Y$ un'identificazione. Dimostrare che se D è un sottoinsieme denso di X, $p(D)$ è denso in Y.

5. Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ ed $(Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici e sia $\mathcal{T}_{X\times Y}$ la topologia prodotto su $X \times Y$. Verificare:
   (a) $\mathcal{T}_{X\times Y}$ è la topologia discreta $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_X$ ed $\mathcal{T}_Y$ sono rispettivamente la topologia discreta su X e su Y;
   (b) $\mathcal{T}_{X\times Y}$ è la topologia banale $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_X$ ed $\mathcal{T}_Y$ sono rispettivamente la topologia banale su X e su Y.

6. Sia K un campo, $n \geq 1$ e $X_1, \dots, X_n$ indeterminate. Sia $K[X_1, \dots, X_n]$ l'anello dei polinomi in $X_1, \dots, X_n$ a coefficienti in K.
Dato $S \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ un sottoinsieme di polinomi, definiamo:
$$V(S) : \{\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in K^n : f(\mathbf{a}) = 0 \,\forall\, f \in S\}.$$
Dimostrare che:
   (a) $V(S) = V((S))$, dove $(S) := \{p_1 f_1 + \cdots + p_h f_h : f_1, \dots, f_h \in S, p_1, \dots, p_h \in K[X_1, \dots, X_n]\}$;
   (b) su K^n si può definire una topologia $\mathcal{Z}$, detta topologia di Zariski, che ha come insiemi chiusi la classe $\mathcal{C}$ definita come segue:
$$\mathcal{C} := \{V(S) : \forall\, S \subseteq K[X_1, \dots, X_n]\};$$
   (c) i punti sono chiusi in $(K^n, \mathcal{Z})$;
   (d) se $n = 1$, $\mathcal{Z}$ coincide con la topologia cofinita.

7. Sia X una corona circolare chiusa in $\mathbb{R}^2$ racchiusa dalle circonferenze C_1 e C_2. Consideriamo su X le seguenti relazioni di equivalenza:
$$x\,\rho_i\,y \Leftrightarrow x = y \text{ oppure } x, y \in C_i, \quad i = 1, 2.$$
A cosa è omeomorfo il quoziente X/ρ_i?

8. Trovare un esempio di applicazione continua $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$, determinando opportunamente per ciascun caso $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$, tale che:
   (a) f sia aperta e non chiusa;
   (b) f sia chiusa e non aperta;
   (c) f sia chiusa e aperta;
   (d) f non sia né aperta né chiusa.

9. Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 3)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + y^2 \leq 1\}$ e siano $\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 3)^2 + y^2 = 1\}$ e $\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + y^2 = 1\}$. Sia $Y = \gamma_1 \cup \gamma_2$ e X/ρ_Y il quoziente di X ottenuto identificando Y a un punto (ovvero quozientando X rispetto alla relazione di equivalenza ρ_Y tale che $x\,\rho_Y\,y \Leftrightarrow x = y$ oppure $x, y \in Y$). Dire se la proiezione $p : X \to X/\rho_Y$ è aperta o non aperta, chiusa o non chiusa.