Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

Soluzioni Tutorato 1 (10 Marzo 2011)
Spazi metrici e topologici

1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme di X. Verificare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

   (a) A è aperto;

   (b) $\forall\, x \in A$, esiste un disco $D_\epsilon(x)$ tale che $D_\epsilon(x) \subseteq A$;

   (c) $\forall\, x \in A$, esiste un aperto V_x tale che $x \in V_x \subseteq A$.

   Soluzione:

$(a) \Rightarrow (b)$: Per definizione, dato (X, d) spazio metrico e $A \subseteq X$, A è aperto se è unione di dischi aperti:

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha$$

Allora $\forall\, x \in A\ \exists\, \bar{\alpha} \in I$ tale che $x \in D_{\bar{\alpha}} = D_\epsilon(y) = \{z \in X |\, d(y, z) < \epsilon\}$.
Scelto dunque $\epsilon' < \min\{d(x, y), \epsilon - d(x, y)\}$ si ha $x \in D_{\epsilon'}(x) \subset D_\epsilon(y) \subset A$.
Infatti, $\forall\, x' \in D_{\epsilon'}(x)$ ($\Rightarrow d(x', x) < \epsilon'$) si ha: $d(x', y) \leq d(x', x) + d(x, y) < \epsilon' + d(x, y) < \epsilon - d(x, y) + d(x, y) = \epsilon \ \Rightarrow\ x' \in D_\epsilon(y)$.

$(b) \Rightarrow (c)$: $D_\epsilon(x)$ è un aperto tale che $x \in D_\epsilon(x) \subseteq A$; $\forall\, x \in A$ basta quindi scegliere $V_x = D_\epsilon(x)$

$(c) \Rightarrow (a)$: Sappiamo che $\forall\, x \in A$, esiste un aperto V_x tale che $x \in V_x \subseteq A$. Allora:
$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} V_x \subseteq A \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} V_x$.
V_x è aperto e quindi unione di dischi aperti. Pertanto A è unione di dischi aperti e quindi è aperto.

2. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto. Determinare l'insieme dei suoi aperti $\mathcal{A}$ e per ogni $x \in X$ l'insieme $\mathfrak{D}(x)$ dei dischi aventi centro in x.

   Soluzione:
   Ricordiamo che la distanza discreta è definita nel modo seguente:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & se\ x = y \\ 1 & se\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow D_\epsilon(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{se } \epsilon \leq 1 \\ X & \text{se } \epsilon > 1 \end{cases}.$$

   Quindi $\mathfrak{D}(x) = \{\{x\}, X\}\ \ \forall x \in X$.

   Descriviamo ora l'insieme degli aperti $\mathcal{A}$ di (X, d).
   Sia U un sottoinsieme di X; allora $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$, cioè U è unione dei suoi punti che, per quanto visto sopra, sono dischi. Allora U è aperto in quanto unione di dischi.
   Ne segue che ogni sottoinsieme di X è aperto, ossia $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ (insieme delle parti di X).

3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Si considerino le tre applicazioni $d_r, \delta, \epsilon : X \times X \to \mathbb{R}$ così definite:

   (a) $d_r(x, y) := rd(x, y)$, $\forall\, x, y \in X$ (dove $r > 0$ è un numero reale fissato);

(b) $\delta(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, $\forall\, x,y \in X$;

(c) $\epsilon(x,y) := \min\{1, d(x,y)\}$, $\forall\, x,y \in X$.

Verificare che d_r, δ, ϵ sono distanze su X.

<u>*Soluzione*</u>:

Osserviamo innanzitutto che, essendo d una metrica su X, $\forall\, x,y,z \in X$ valgono le seguenti condizioni:

(i) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(y,x) = d(x,y)$;

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

(a) (i) $\forall\, x,y \in X \quad d_r(x,y) = rd(x,y) \geq 0$ poiché $r > 0$ e $d(x,y) \geq 0$. Inoltre $d_r(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d_r(x,y) = rd(x,y) = rd(y,x) = d_r(y,x)\ \forall\, x,y \in X$;

(iii) $\forall\, x,y,z \in X \quad d_r(x,y) = rd(x,y) \leq r(d(x,z) + d(z,y)) = rd(x,z) + rd(z,y) =$
$= d_r(x,z) + d_r(z,y)$.

(b) (i) $\forall\, x,y \in X \quad \delta(x,y) \geq 0$ poiché $d(x,y) \geq 0$ e $1 + d(x,y) > 0$. Inoltre, $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $\forall\, x,y \in X \quad \delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \delta(y,x)$;

(ii) $\forall\, x,y,z \in X$ dobbiamo mostrare che $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$.
Poniamo $a := d(x,y)$ e $b := d(x,z) + d(z,y)$; sappiamo che $a \leq b \Rightarrow a + ab \leq b + ab \Rightarrow a(1+b) \leq b(1+a) \Rightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$ cioè $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \delta(x,z) + \delta(z,y)$.

(c) (i) $\forall\, x,y \in X \quad \epsilon(x,y) \geq 0$ poiché $1 \geq 0$ e $d(x,y) \geq 0$. Inoltre $\epsilon(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $\forall\, x,y \in X \quad \epsilon(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \min\{1, d(y,x)\} = \epsilon(y,x)$;

(iii) Dimostriamo, ora, la diseguaglianza triangolare.
$\forall\, x,y,z \in X$ $\epsilon(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \leq \min\{1, d(x,z) + d(z,y)\}$ e
$\epsilon(x,z) + \epsilon(z,y) = \min\{1, d(x,z)\} + \min\{1, d(z,y)\}$.
Ci basterà dunque verificare che $\min\{1, d(x,z)+d(z,y)\} \leq \min\{1, d(x,z)\}+\min\{1, d(z,y)\}$, cioè che posto $a := d(x,z)$ e $b := d(z,y)$ si abbia $\min\{1, a+b\} \leq \min\{1, a\} + \min\{1, b\}$.

Verifichiamo la disuguaglianza nei due casi seguenti:

- Supponiamo $1 \leq a + b \Rightarrow \min\{1, a+b\} = 1$.
  Se $a \geq 1$ allora $\min\{1, a\} + \min\{1, b\} = 1 + \min\{1, b\} \geq 1$; se $b \geq 1$ si procede allo stesso modo; se infine $a < 1$ e $b < 1$, allora $\min\{1, a\}+\min\{1, b\} = a+b \geq 1$.
- Supponiamo $1 > a + b \Rightarrow \min\{1, a+b\} = a + b$.
  Necessariamente deve quindi essere $a < 1$ e $b < 1$. Ne segue che $\min\{1, a\} + \min\{1, b\} = a + b = \min\{1, a+b\}$.

4. (a) Due metriche d e d' su X sono dette *topologicamente equivalenti* [e si scrive $d \sim d'$] se hanno gli stessi aperti.
Per ogni $x \in X$ si indichi con $\mathfrak{D}(x)$ [risp. $\mathfrak{D}'(x)$] l'insieme dei dischi di centro x in (X,d) [risp. (X,d')].
Dimostrare che vale il seguente *criterio di equivalenza topologica*:
$d \sim d' \Leftrightarrow \forall x \in X$, sono verificate le due condizioni:

i. $\forall D \in \mathfrak{D}(x)$, $\exists\, D' \in \mathfrak{D}'(x)$ tale che $D' \subseteq D$;

ii. $\forall D' \in \mathfrak{D}'(x)$, $\exists\, D \in \mathfrak{D}(x)$ tale che $D \subseteq D'$.

(b) Sia (X, d) un fissato spazio metrico. Verificare che le metriche d_r, δ, ϵ definite nell'esercizio 3 sono topologicamente equivalenti [alla metrica d e quindi tra loro].

<u>*Soluzione*</u>:

(a) $\Rightarrow$: Dimostriamo i. (si procederà in maniera analoga per ii.).
Sia $x \in X$ e sia $D \in \mathfrak{D}(x)$. In particolare D è un aperto di $(X, d) \Rightarrow D$ è aperto in (X, d') (dall'equivalenza topologica di d e d'). Dall'esercizio 1 ($(a) \Leftrightarrow (b)$),
$\exists\, D' \in \mathfrak{D}'(x)$ tale che $D' \subseteq D$.

$\Leftarrow$: Consideriamo A sottoinsieme di X aperto rispetto alla metrica d.
Dall'esercizio 1, A è aperto $\Leftrightarrow \forall x \in A$, esiste un disco $D(x) \in \mathfrak{D}(x)$ tale che $D \subseteq A$.
Ora, per ipotesi, $\forall D \in \mathfrak{D}(x)$, $\exists\, D' \in \mathfrak{D}'(x)$ tale che $D' \subseteq D \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} D(x) \supseteq \bigcup_{x \in A} D'(x) \supseteq A$.
Da cui, $A = \bigcup_{x \in A} D'(x) \Rightarrow A$ è aperto rispetto alla metrica d'.

Si procede in modo analogo per dimostrare che se A è aperto in (X, d') allora A è aperto in (X, d).

(b) Utilizziamo il criterio d'equivalenza per dimostrare che d_r, δ ed ϵ sono topologicamente equivalenti alla metrica d.

- $d_r \sim d$
  $\forall x \in X$ consideriamo $D^r_\epsilon(x) \in \mathfrak{D}^r(x)$ (famiglia dei dischi aperti rispetto alla metrica d_r) $\Rightarrow D^r_\epsilon(x) = \{y \in X : d_r(x, y) < \epsilon\} = \{y \in X : rd(x, y) < \epsilon\} = \left\{y \in X : d(x, y) < \frac{\epsilon}{r}\right\} = D_{\frac{\epsilon}{r}}(x)$.
  d e d_r sono allora topologicamente equivalenti poiché $\mathfrak{D}(x)$ (famiglia dei dischi aperti rispetto alla metrica d) e $\mathfrak{D}^r(x)$ coincidono.

- $\delta \sim d$
  $\forall x \in X$ sia $D^\delta_\epsilon(x) \in \mathfrak{D}^\delta(x)$ risulta che $D^\delta_\epsilon(x) = \{y \in X : \delta(x, y) < \epsilon\} = \left\{y \in X : \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \epsilon\right\} = \{y \in X : d(x, y)(1 - \epsilon) < \epsilon\} = \begin{cases} X \ se \ \epsilon \geq 1 \\ D_{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}}(x) \ se \ \epsilon < 1 \end{cases}$.
  Segue che, in ogni caso, $D^\delta_\epsilon(x)$ contiene un disco di $\mathfrak{D}(x)$.

  Viceversa, preso $D_\epsilon(x) \in \mathfrak{D}(x)$ abbiamo che:
  $D_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\} = \{y \in X : d(x, y) + \epsilon d(x, y) < \epsilon + \epsilon d(x, y)\} =$
  $= \left\{y \in X : \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right\} = \left\{y \in X : \delta(x, y) < \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right\} = D^\delta_{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}(x)$.

- $\epsilon \sim d$
  Sia $x \in X$ e $D^\epsilon_r(x) \in \mathfrak{D}^\epsilon(x)$ Allora:
  $D^\epsilon_r(x) = \{y \in X : \epsilon(x, y) < r\} = \{y \in X : \min\{1, d(x, y)\} < r\}$.
  Se $r > 1 \Rightarrow D^\epsilon_r(x) = X$ altrimenti, nel caso in cui $0 < r \leq 1, D^\epsilon_r = D_r(x)$. In ogni caso, $D_r(x) \subseteq D^\epsilon_r(x)$.
  Viceversa, sia $D = D_r(x) \in \mathfrak{D}(x)$. Se $r > 1$ possiamo scegliere $D' = D^\epsilon_1 \in \mathfrak{D}^\epsilon(x)$; se $r \leq 1$ allora prenderemo $D' = D^\epsilon_r(x) \in \mathfrak{D}^\epsilon(x)$. In entrambi i casi, otteniamo che $D' \subseteq D$.

5. Dimostrare che ogni spazio metrizzabile e finito è discreto.

<u>*Soluzione*</u>
Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio metrizzabile e finito; allora $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tale che esista una distanza d su X che induca la topologia $\mathcal{T}$.
Ricordiamo che X è discreto se e solo se tutti i suoi punti sono aperti.
Sia dunque $r_{ij} := d(x_i, x_j)\ \forall\, i, j = 1, \ldots, n$. Scegliendo $\epsilon < \min\{r_{ij} : \ \forall i, j = 1, \ldots, n \ \ i \neq j\}$ si ha che $D_\epsilon(x_i) = \{x_i\}$, da cui segue che $\{x_i\}$ è aperto $\forall i$.

6. Assegnata una famiglia $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ di topologie su un insieme X, verificare che $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$ è una topologia su X.
Dare invece un esempio di due topologie $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ su un insieme X tali che $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ non sia una topologia.

<u>*Soluzione*</u>:
Per dimostrare che la famiglia $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$ sia una topologia su X basterà verificare:

(a) $\varnothing$ e X sono elementi di $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$;
(b) l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi di $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$ è un insieme di $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$;
(c) l'intersezione di due insiemi qualsiasi di $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$ è un insieme di $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$.

Si ha:

(a) $\varnothing$ e X appartengono a $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$ poiché $\varnothing$ e X appartengono a $\mathcal{T}_\alpha$ $\forall\alpha\in I$;
(b) Sia $\{A_j\}_{j\in J}$ una famiglia qualsiasi di aperti in $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha \Rightarrow\ A_j \in \mathcal{T}_\alpha\ \forall\alpha\in I$ e $\ j\in J \Rightarrow$
$\Rightarrow\ \bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_\alpha\ \forall\alpha\in I$ poiché $\mathcal{T}_\alpha$ è una topologia su $X \Rightarrow\ \bigcup_{j\in J} A_j \in \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$;
(c) Siano A_1 e $A_2 \in \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha \Rightarrow A_1$ e A_2 appartengono a $\mathcal{T}_\alpha$ $\forall\alpha\in I \Rightarrow A_1\cap A_2 \in \mathcal{T}_\alpha$ $\forall\alpha\in I$ poiché $\mathcal{T}_\alpha$ è una topologia su X $\forall\alpha\in I \Rightarrow A_1\cap A_2 \in \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$.

Consideriamo ora l'insieme $X := \{a,b,c\}$ e le seguenti topologie su X :
$\mathcal{T}_1 := \{\{a\}, X, \varnothing\}$ e $\mathcal{T}_2 := \{\{b\}, X, \varnothing\}$.
Allora $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\{a\}, \{b\}, \varnothing, X\}$, ma $\{a,b\} = \{a\}\cup\{b\} \notin \mathcal{T}_1\cup\mathcal{T}_2$.

7. Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due topologie su un insieme X, con $\mathcal{T}$ strettamente meno fine di $\mathcal{T}'$. Dimostrare che $\mathcal{T}$ non è una base della topologia $\mathcal{T}'$.

<u>*Soluzione*</u>:
Poiché $\mathcal{T}$ è strettamente meno fine di $\mathcal{T}'$, $\exists\, A \in \mathcal{T}'$ tale che $A \notin \mathcal{T}$. Se, per assurdo, $\mathcal{T}$ fosse una base della topologia $\mathcal{T}'$, A sarebbe unione di elementi di $\mathcal{T}$ ma, poiché $\mathcal{T}$ è una topologia, si otterrebbe che A apparteniene a $\mathcal{T}$. Ciò è assurdo; quindi $\mathcal{T}$ non può essere una base della topologia $\mathcal{T}'$.

8. Sia $\mathcal{S} := \{\mathbb{R}; \emptyset; (-\infty, a],\ \forall a\in\mathbb{R}\}$.

(a) Verificare che $\mathcal{S}$ non è una topologia su $\mathbb{R}$.
(b) Determinare la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ generata da $\mathcal{S}$ e confrontarla con la topologia
$\mathfrak{i}_S = \{(-\infty, b) : b\in\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

<u>*Soluzione*</u>:

(a) Sia $a\in\mathbb{R}$ e sia $A_n := (-\infty, a - \frac{1}{n}] \in \mathcal{S}\ \ \forall n \geq 1\ \Rightarrow\ \bigcup_{n\geq 1} A_n = (-\infty, a) \notin \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}$ non è una topologia su $\mathbb{R}$.
(b) Dimostriamo, in primo luogo che, $\mathcal{S}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$, mostrando che $\mathcal{S}$ è un ricoprimento di $\mathbb{R}$ e l'intersezione di due elementi qualsiasi di $\mathcal{S}$ è unione di elementi di $\mathcal{S}$.
   - $\mathcal{S}$ è un ricoprimento di $\mathbb{R}$ poichè $\mathbb{R}\in\mathcal{S}$;
   - $\forall (-\infty, a], (-\infty, b] \in \mathcal{S}$ si ha: $(-\infty, a] \cap (-\infty, b] = (-\infty, \min\{a,b\}] \in \mathcal{S}$.

   Sia ora $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ la topologia generata da $\mathcal{S}$.
   Come già visto $\forall a\in\mathbb{R}$ $(-\infty, a) = \bigcup_{n\geq 1}(-\infty, a]$ da cui $(-\infty, a) \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$.
   Sia $\mathcal{T} := \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, a], (-\infty, b), \forall a, b\in\mathbb{R}\}$; è evidente che $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S})$; quindi, verificando che $\mathcal{T}$ è una topologia, necessariamente deve essere $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{S})$.
   Osserviamo innanzitutto che l'intersezione tra due intervalli illimitati a sinistra (aperti

o chiusi) è ancora un intervallo illimitato a sinistra.

Inoltre, $\bigcup_{i\in I}(-\infty, a_i) = (-\infty, \sup\{a_i\})$ mentre $\bigcup_{i\in I}(-\infty, a_i] = \begin{cases} (-\infty, \sup\{a_i\}) \\ (-\infty, \sup\{a_i\}] \end{cases}$, a seconda dei casi ; in ogni caso, l'unione di una famiglia qualsiasi di intervalli illimitati a sinistra è ancora un intervallo illimitato a sinistra.Infine $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Ne deduciamo che $\mathcal{T}$ è una topologia.

$\mathcal{T}$ è strettamente più fine di $\mathfrak{i}_{\mathcal{S}}$; infatti: $\forall b \in \mathbb{R}(-\infty, b) \in \mathcal{T}$, mentre $(-\infty, b] \notin \mathfrak{i}_{\mathcal{S}}$.

9. Sia $\mathcal{S} := \{(-\infty, 1); (a, b), \forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b\}$.
   (a) Verificare che $\mathcal{S}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$.
   (b) Verificare che la topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ generata da $\mathcal{S}$ è strettamente meno fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}$.
   (c) Per quali $a \in \mathbb{R}$, $(-\infty, a)$ è un aperto di $\mathcal{T}$?

   <u>*Soluzione*</u>

   (a) Affinché $\mathcal{S}$ sia base di una topologia su $\mathbb{R}$ bisognerà dimostrare che sia un ricoprimento di $\mathbb{R}$ e che l'intersezione di due elementi di $\mathcal{S}$ è unione di elementi di $\mathcal{S}$.
   E' facile vedere che, ad esempio, $\mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n\geq 1}(\frac{1}{2}, n)$. Inoltre, l'intersezione tra due intervalli di $\mathcal{S}$ o è vuota, nel caso in cui i due intervalli siano disgiunti, o assume una delle due forme seguenti: $(a, 1)$, se stessimo intersecando l'intervallo $(-\infty, 1)$ con un generico intervallo limitato (a, b), con $a < 1$; $(\max\{a, c\}, \min\{b, d\})$, nel caso in cui stessimo intersecanto due intervalli aperti limitati a destra e a sinistra.
   (b) Indichiamo con ε la topologia euclidea. Essendo $\mathcal{S}$ costituita da intervalli aperti, allora $\mathcal{S} \subseteq \varepsilon$, da cui $\mathcal{T} < \varepsilon$. Prendendo ora, ad esempio, l'aperto $(-1, 0) \in \varepsilon$ risulta $(-1, 0) \notin \mathcal{T}$, da cui concludiamo che $\mathcal{T} \subsetneqq \varepsilon$.
   (c) $(-\infty, a) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow a \geq 1$.
   Infatti: se $a \geq 1$ $(-\infty, a) = (-\infty, 1) \cup (\frac{1}{2}, a) \in \mathcal{T}$. Se, viceversa, $(-\infty, a) \in \mathcal{T}$ allora necessariamente $(-\infty, a) \supset (-\infty, 1) \Rightarrow a \geq 1$.

10. Trovare uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ in cui ogni aperto sia anche chiuso, con $\mathcal{T}$ diversa dalla topologia banale o discreta.
    Se in uno spazio topologico ogni aperto è anche chiuso è altresì vero che ogni chiuso è anche aperto?

    <u>*Soluzione*</u>
    Sia $X = \{a, b, c\}$ e sia $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b, c\}, \varnothing, X\}$. E' facile verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia.
    Verifichiamo che tutti gli aperti di $\mathcal{T}$ sono chiusi, mostrando che il complementare di ciascun aperto è aperto. Si ha infatti:
    $\{a\}^c = \{b, c\} \in \mathcal{T}$, $\{b, c\}^c = \{a\} \in \mathcal{T}$, $\varnothing^c = X \in \mathcal{T}$, $X^c = \varnothing \in \mathcal{T}$.

    Sì, è vero. Infatti, supponendo che ogni aperto è chiuso, se C è un chiuso $\Rightarrow C^c$ è aperto $\Rightarrow C^c$ è chiuso $\Rightarrow (C^c)^c = C$ è aperto.

11. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto e $\{x_n\}$ una successione in X. Verificare che $\{x_n\}$ converge in $X \Leftrightarrow \{x_n\}$ è definitivamente costante.

    <u>*Soluzione*</u>

- $\Rightarrow$: Sia $\{x_n\}$ una successione convergente ad $x_0 \in X$. Allora $\forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon$ tale che $\forall\, n \geq N_\epsilon \;\; x_n \in \mathcal{D}_\epsilon(x_0) := \{y \in X : d(x_0, y) < \epsilon\}$.
  Se $\epsilon < 1$, essendo X uno spazio metrico discreto, $\mathcal{D}_\epsilon(x_0) = \{x_0\} \;\Rightarrow\; \exists\, N_\epsilon$ tale che $\forall n \geq N_\epsilon \; x_n \in \mathcal{D}_\epsilon(x_0) = \{x_0\} \Rightarrow x_n = x_0 \, \forall n \geq N_\epsilon \Rightarrow x_n$ è definitivamente costante.
- $\Leftarrow$: Supponiamo ora che $\{x_n\}$ sia definitivamente costante, ciò significa che $\exists\, n_0$ t.c. $\forall n \geq$
  n_0
  $x_n = x_0$.
  Preso $\epsilon > 0$ ed $n_\epsilon = n_0 \;\Rightarrow\; \forall n \geq n_\epsilon \;\; x_n = x_0 \in \mathcal{D}_\epsilon(x_0)$. Segue che $\{x_n\}$ converge ad x_0.

12. <u>*Def*</u>: Un punto $x \in X$ si dice *punto di accumulazione* dell'insieme $S \subseteq X$ se ogni intorno di x contiene almeno un punto di S diverso da x, cioè se $(N \backslash \{x\}) \cap S \neq \emptyset$ per ogni intorno N di x.
    L'insieme dei punti di accumulazione di S si chiama *derivato* di S e si denota con $D(S)$.

    Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che X è discreto se e solo se per ogni sottoinsieme A di X, $D(A) = \emptyset$.

    <u>*Soluzione*</u>

    - $\Rightarrow$: Sia $A \subseteq X$. Se X è discreto, $\forall x \in X$ scegliendo $N = \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$ abbiamo che $N \backslash \{x\} \cap A = \varnothing$, da cui x non è un punto di accumulazione per A. Ne segue che $D(A) = \varnothing$.
    - $\Leftarrow$: In particolare $D(X) = \varnothing$; quindi, $\forall x \in X \, \exists N_x$ intorno di x tale che $(N_x \backslash \{x\}) \cap X = \varnothing \Rightarrow N_x = \{x\}$. Per definizione di intorno, $\exists U$ aperto tale che $x \in U \subseteq N_x = \{x\}$, da cui $\{x\} = U$ è aperto. Ne segue che X è discreto, poichè tutti i suoi punti sono aperti.