Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

Tutorato 1 (10 Marzo 2011)
Spazi metrici e topologici

1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme di X. Verificare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) A è aperto;
   (b) $\forall\, x \in A$, esiste un disco $D_\epsilon(x)$ tale che $D_\epsilon(x) \subseteq A$;
   (c) $\forall\, x \in A$, esiste un aperto V_x tale che $x \in V_x \subseteq A$.

2. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto. Determinare l'insieme dei suoi aperti $\mathcal{A}$ e per ogni $x \in X$ l'insieme $\mathfrak{D}(x)$ dei dischi aventi centro in x.

3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Si considerino le tre applicazioni $d_r, \delta, \epsilon : X \times X \to \mathbb{R}$ così definite:
   (a) $d_r(x, y) := rd(x, y)$, $\forall\, x, y \in X$ (dove $r > 0$ è un numero reale fissato);
   (b) $\delta(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, $\forall\, x, y \in X$;
   (c) $\epsilon(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$, $\forall\, x, y \in X$.

   Verificare che d_r, δ, ϵ sono distanze su X.

4. (a) Due metriche d e d' su X sono dette *topologicamente equivalenti* [e si scrive $d \sim d'$] se hanno gli stessi aperti.
   Per ogni $x \in X$ si indichi con $\mathfrak{D}(x)$ [risp. $\mathfrak{D}'(x)$] l'insieme dei dischi di centro x in (X, d) [risp. (X, d')].
   Dimostrare che vale il seguente *criterio di equivalenza topologica*:
   $d \sim d' \Leftrightarrow \forall x \in X$, sono verificate le due condizioni:
   i. $\forall D \in \mathfrak{D}(x)$, $\exists\, D' \in \mathfrak{D}'(x)$ tale che $D' \subseteq D$;
   ii. $\forall D' \in \mathfrak{D}'(x)$, $\exists\, D \in \mathfrak{D}(x)$ tale che $D \subseteq D'$.

   (b) Sia (X, d) un fissato spazio metrico. Verificare che le metriche d_r, δ, ϵ definite nell'esercizio 3 sono topologicamente equivalenti [alla metrica d e quindi tra loro].

5. Dimostrare che ogni spazio metrizzabile e finito è discreto.

6. Assegnata una famiglia $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di topologie su un insieme X, verificare che $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{T}_\alpha$ è una topologia su X.
   Dare invece un esempio di due topologie $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ su un insieme X tali che $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ non sia una topologia.

7. Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due topologie su un insieme X, con $\mathcal{T}$ strettamente meno fine di $\mathcal{T}'$. Dimostrare che $\mathcal{T}$ non è una base della topologia $\mathcal{T}'$.

8. Sia $\mathcal{S} := \{\mathbb{R}; \emptyset; (-\infty, a], \forall a \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Verificare che $\mathcal{S}$ non è una topologia su $\mathbb{R}$.
   (b) Determinare la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ generata da $\mathcal{S}$ e confrontarla con la topologia $\mathrm{i}_S = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

9. Sia $\mathcal{S} := \{(-\infty, 1); (a, b), \forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b\}$.
   (a) Verificare che $\mathcal{S}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$.
   (b) Verificare che la topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ generata da $\mathcal{S}$ è strettamente meno fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}$.
   (c) Per quali $a \in \mathbb{R}$, $(-\infty, a)$ è un aperto di $\mathcal{T}$?

10. Trovare uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ in cui ogni aperto sia anche chiuso, con $\mathcal{T}$ diversa dalla topologia banale o discreta.
    Se in uno spazio topologico ogni aperto è anche chiuso è altresì vero che ogni chiuso è anche aperto?

11. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto e $\{x_n\}$ una successione in X. Verificare che $\{x_n\}$ converge in $X \Leftrightarrow \{x_n\}$ è definitivamente costante.

12. *Def*: Un punto $x \in X$ si dice *punto di accumulazione* dell'insieme $S \subseteq X$ se ogni intorno di x contiene almeno un punto di S diverso da x, cioè se $(N \setminus \{x\}) \cap S \neq \emptyset$ per ogni intorno N di x.
    L'insieme dei punti di accumulazione di S si chiama *derivato* di S e si denota con $D(S)$.

    Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che X è discreto se e solo se per ogni sottoinsieme A di X, $D(A) = \emptyset$.