Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011
GE220
Prima prova di valutazione in itinere – 13 Aprile 2011

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente, altrimenti non verranno prese in considerazione. I telefoni cellulari devono essere tenuti spenti e nella borsa. Non è consentito utilizzare libri o appunti.

Esercizio 1 (8 punti)**.** Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico separabile e non numerabile.

(a) dimostrare che, se X è metrizzabile, la metrica che genera la sua topologia non è la metrica discreta.

(b) Dimostrare che se X è metrizzabile allora soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

Esercizio 2 (18 punti)**.** Considerare $\mathbb{R}^2$ con la topologia generata da $\mathcal{F} = \{(-\infty, a) \times (-\infty, b)\}_{a,b \in \mathbb{R}}$.

(a) (7 punti) L'insieme $X = (0, 1) \times (-\infty, 0)$ è aperto o chiuso? Descrivere i suoi punti interni, esterni, di frontiera e $D(X)$.

(b) (7 punti) Dare ad X la topologia di sottospazio, dire quali dei seguenti insiemi sono aperti o chiusi in X:
$A = (0, \frac{1}{2}) \times (-3, 0)$
$B = (0, \frac{1}{2}) \times (-\infty, 0)$
$C = (0, \frac{1}{2}] \times [-3, 0)$
$D = [\frac{1}{2}, 1) \times [-3, 0)$

(c) (4 punti) Considerare l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x$ dove il codominio ha topologia euclidea e il dominio quella generata da $\mathcal{F}$. f è continua? è continua la sua restrizione ad X?

Esercizio 3 (8 punti)**.** Sia $Z = \mathbb{R}^2/p$ dove

$$(x_1, y_1)\, p\, (x_2, y_2) \iff x_1 = \pm x_2,\ y_1 = y_2 + c\,, c \in \mathbb{Z}$$

Descrivere un omeomorfismo di Z su $[0, 1) \times S^1$. Dire se Z è T_2 (*Suggerimento:* Dedurre l'omeomorfismo dalla composizione di una identificazione

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty) \times S^1$$

con un omeomorfismo $[0, +\infty) \times S^1 \longrightarrow [0, 1) \times S^1$.

Soluzioni

Esercizio 1 (a) Se $\mathcal{T}$ fosse la topologia discreta, l'unico sottoinsieme denso di X sarebbe X stesso. Ma allora X, essendo separabile, sarebbe numerabile, contro l'ipotesi che non lo sia.

(b) Sia $S \subset X$ un sottoinsieme denso numerabile e sia

$$\mathcal{B} = \{D_q(x) : x \in S,\ q > 0 \text{ razionale}\}$$

Allora $\mathcal{B}$ è una famiglia numerabile di aperti ed è sufficiente far vedere che è una base. Sia $A \subset X$ un aperto non vuoto, e sia $y \in A$. Sia $r > 0$ tale che $D_r(y) \subset A$. Per la densità di S esiste $x \in S \cap D_{r/3}(y)$. Se q è un numero razionale tale che $\frac{r}{3} < q < \frac{2r}{3}$ allora $y \in D_q(x) \subset D_r(y) \subset A$. Quindi A è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Esercizio 2 Le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{F}$ sono ancora in $\mathcal{F}$, e $\mathcal{F}$ è un ricoprimento. Pertanto $\mathcal{F}$ è base della topologia che genera.

(a) X non è aperto perché non contiene elementi di $\mathcal{F}$. X non è chiuso perché $\mathbb{R}^2 \setminus X$ non è aperto: infatti $(1,1) \notin X$ ma ogni elemento di $\mathcal{F}$ contenente $(1,1)$ è della forma $(-\infty, a) \times (-\infty, b)$ con $a, b > 1$ e quindi interseca X.

$\mathrm{Int}(X) = \emptyset$ perché nessun elemento di $\mathcal{F}$ è contenuto in X. $\mathrm{Est}(X) = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$, $\mathrm{Fr}(X) = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Poichè $X \subset \mathrm{Fr}(X)$ e ogni punto di $\mathrm{Fr}(X)$ è di accumulazione, si ha $\mathrm{Fr}(X) = D(X)$.

(b) A non è aperto in X perché un aperto in X deve contenere punti della forma (x, y) con y arbitrariamente negativo. A non è chiuso in X perché ogni intorno aperto di $(\frac{1}{2}, 0) \in X \setminus A$ interseca A.

$B = X \cap [(-\infty, \frac{1}{2}) \times (-\infty, 0)]$ è aperto in X.

C non è né aperto né chiuso per motivi simili al caso di A.

D è chiuso perché ogni punto $(x, y) \in X \setminus D$ è tale che $x < \frac{1}{2}$ oppure $y < -3$ allora (x, y) possiede un intorno aperto U che non interseca D. Infatti se $x < \frac{1}{2}$ allora si prende $U = X \cap [(-\infty, \epsilon) \times \mathbb{R}]$, dove $x < \epsilon < \frac{1}{2}$. Similmente si fa nell'altro caso.

(c) f non è continua perché la controimmagine di un intervallo aperto e limitato non è aperta. Per un motivo analogo non è continua nemmeno la sua restrizione a X.

Esercizio 3 Si definisce una applicazione continua

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty) \times S^1$$

ponendo

$$\sigma(x, y) = (|x|; (\cos(2\pi y), \sin(2\pi y))$$

Questa applicazione è continua perché lo sono le componenti. Inoltre σ è compatibile con la relazione p per come è definita. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto saturo. Allora A è unione di aperti della forma

$$[(a,b) \cup (-b,-a)] \times \left[\bigcup_{z\in\mathbb{Z}} (\alpha + z, \beta + z)\right]$$

e l'immagine di un tale aperto è il prodotto dell'intervallo $(|a|,|b|)$ oppure $[0, \max\{|a|,|b|\})$ per l'arco aperto di circonferenza:

$$\{(\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)) : \alpha < \theta < \beta\}$$

e quindi è aperto. Ne consegue che σ è un'identificazione.

Sia $\phi : [0,+\infty) \longrightarrow [0,1)$ definito da $\phi(t) = \frac{t}{1+t}$. Componiamo σ con l'omeomorfismo

$$\phi \times \mathrm{id}_{S^1} : [0,+\infty) \times S^1 \longrightarrow [0,1) \times S^1$$

e otteniamo un'identificazione che induce l'omeomorfismo cercato.