Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011
GE220
Appello X – 13 settembre 2011

Esercizio 1 (10 punti). a) Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita κ. Sia X lo spazio ottenuto da $(\mathbb{R}, \kappa)$ identificando a un punto il sottoinsieme $A = \{1, 2, 5\}$. Dimostrare che X ha la topologia cofinita.

b) Sia Y ottenuto da $(\mathbb{R}, \kappa)$ identificando a un punto il sottoinsieme $\mathbb{Z}$. Dimostrare che Y non ha la topologia cofinita.

c) Verificare se Y è uno spazio T_1, motivando la risposta.

d) Verificare se la topologia su Y è più o meno fine della topologia cofinita, motivando la risposta.

Esercizio 2 (15 punti). a) Enunciare la definizione di *equivalenza omotopica tra due spazi topologici.*

b) Sia $\Sigma = \{(x, y) : x \leq 0\}$ con la topologia euclidea. Utilizzando l'omotopia:

$$F(x, y, t) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } x \leq 0 \\ ((1-t)x, y) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

dimostrare che Σ e $\mathbb{R}^2$ sono omotopicamente equivalenti, esibendo applicazioni continue tra i due spazi che sono inverse omotopiche una dell'altra.

c) Utilizzando F dimostrare che

$$X = \{(x, y) : xy = 0\}, \qquad Y = \{(x, y) : x - xy = 0\}$$

sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 3 (8 punti). Sia $g \geq 1$. Classificare la superficie compatta e connessa X definita dal seguente poligono etichettato:

$$a_1 a_2 a_1^{-1} a_2 \cdots a_{2g-1} a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}$$

e trovare, se esiste, una superficie compatta e connessa avente la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré di X ma non omeomorfa a X.

SOLUZIONI (cenni)

Esercizio 1. a) Gli aperti saturi di $\mathbb{R}$ rispetto a κ sono i complementari di insiemi finiti K che contengono A oppure ne sono disgiunti. Le loro immagini in X sono tutti e soli gli insiemi complementari insiemi finiti.

b) $Y \setminus [\mathbb{Z}]$ è un aperto della topologia cofinita ma la sua controimmagine $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ no appartiene a κ. Quindi Y non ha la topologia cofinita.

c) Il punto $[\mathbb{Z}] \in Y$ non è chiuso per la b).

d) Ogni aperto di Y diverso da $\emptyset$ è complementare di un insieme finito. Quindi la topologia di Y è meno fine della topologia cofinita.

Esercizio 2. b) $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Sigma$ definita da

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \text{(x,y)}, & \text{se } x \leq 0 \\ \text{(0,y)}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è un'equivalenza omotopica, la cui inversa omotopica è l'nclusione $\psi : \Sigma \subset \mathbb{R}^2$. L'applicazione F definisce un'omotopia tra l'identità di $\mathbb{R}^2$ e $\phi\psi$, mentre $\psi\phi$ è proprio l'identità di Σ.

c) X ed Y sono omeomorfi quindi anche omotopicamente equivalenti. In alternativa si può osservare che La restrizione di F a $X \times I$ definisce un'equivalenza omotopica tra X e la retta $x = 0$. Similmente la restrizione di F a $Y \times I$ definisce un'equivalenza omotopica tra Y e la retta $x = 0$. Per transitività si ottiene che X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 3. I vertici costituiscono un'unica classe di equivalenza. Quindi per la formula si ha:

$$\chi(X) = 1 + 1 - 2g = 2 - 2g$$

Quindi X è omeomorfa a $2g\mathbb{P}^2$ perché non è orientabile, e ha la stessa caratteristica di gT, che è orientabile.