Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011
GE220
Appello B – 13 luglio 2011

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente. I telefoni cellulari devono rimanere spenti. Non è consentito utilizzare libri o appunti.

Esercizio 1 (9 punti). Dimostrare i seguenti fatti:

a) Un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto. b) Un sottinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso. c) Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua con X spazio compatto e Y spazio di Hausdorff allora f è chiusa.

Esercizio 2 (16 punti). Sia $g : [-1, 1/2) \to \mathbb{R}^2$ così definita:

$$f(t) = \begin{cases} (1+2t, 0) & \text{se } -1 \le t \le 0 \\ \left(\frac{1}{2}\cos 2\pi t + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin 2\pi t\right) & \text{se } 0 \le t < \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) stabilire se g è continua e se è un omeomorfismo sull'immagine.

b) Sia $X = \mathrm{Im}(g)$. Stabilire se X è compatto e/o connesso.

c) Sia $F : X \times \mathbf{I} \to X$ definita da:

$$F((x,y),t) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } x \ge 0 \\ ((1-t)x, y) & \text{se } -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

Utilizzare F per dimostrare che X è omotopicamente equivalente a

$$Y = \{(x,y) \in X : x \ge 0\}$$

d) Utilizzare c) per calcolare $\pi_1(X, (0,0))$.

Esercizio 3 (8 punti). Classificare la superficie compatta e connessa X definita dal seguente poligono etichettato:

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1}a_5^{-1}$$

e assegnare, mediante un poligono etichettato, una superficie compatta e connessa S avente la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré di X ma non omeomorfa a X.