Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011
GE220
Appello A – 16 giugno 2011

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente. I telefoni cellulari devono rimanere spenti. Non è consentito utilizzare libri o appunti.

Esercizio 1 (10 punti). Dimostrare che i sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea sono tutti e soli gli intervalli.

Esercizio 2 (8 punti). Sia $X = [0,1]/\rho$, dove $[0,1]$ ha la topologia euclidea e ρ è la seguente relazione di equivalenza: $x\rho y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \{0, 1/2, 1\}$. Dire se: a) X è localmente euclideo, b) X è T_2, c) X è compatto, d) esiste un omeomorfismo tra X e S^1.

Esercizio 3 (8 punti). In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea siano

$$A = \{(\pm 1/n, 0), n \geq 1 \text{ intero}\}, \quad B = \{(at, 1-t), 0 \leq t \leq 1, a = \pm 1/n\}$$

$C = B \cup \{(0,0)\}$, $D = C \setminus \{(0,1)\}$. Discutere la connessione e la connessione per archi di A, B, C, D.

Esercizio 4 (9 punti). In $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}, \quad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K, 0 \leq z \leq 1\}$$

Sia inoltre $X = H/\sigma$ dove $(x,y,z)\sigma(x',y',z')$ se e solo se $(x,y,z) = (x',y',z')$ oppure $x = x'$, $y = y'$, $z, z' \in \{0,1\}$. Dimostrare che X è omeomorfo a $K \times S^1$ e calcolare $\pi_1(X, x_0)$ al variare di $x_0 \in X$. Dire se X è una varietà topologica motivando la risposta.

SOLUZIONI (cenni)

1) La risposta è data dai teoremi 11.2 e 11.3 p. 126 del libro di testo.

2) a) X non è localmente euclideo perché in ogni intorno saturo U di $\{0, 1/2, 1\}$ il complementare di $\{0, 1/2, 1\}$ possiede almeno 3 componenti connesse. Pertanto ogni intorno U/ρ di $[0]$ è tale che $U/\rho \setminus \{[0]\}$ è sconnesso in almeno 3 componenti e quindi U/ρ non può essere omeomorfo ad un intervallo aperto.

b) X è T_2 perché per ogni coppia di punti di $[0, 1]$, di cui uno almeno non appartenga a $\{0, 1/2, 1\}$, è possibile trovare due aperti saturi disgiunti e contenenti un punto ciascuno.

c) X è compatto perché è quoziente di uno spazio compatto.

d) X non è omeomorfo a S^1 perché non è localmente euclideo (per la a)) mentre S^1 lo è.

3) A è sconnesso, B è connesso per archi, C è connesso ma non è connesso per archi, D è sconnesso.

4)La relazione di equivalenza è l'identità sulle prime due coordinate e identifica $0 = 1$ nella terza, e quindi X è omeomorfo a $K \times S^1$ perché S^1 è ottenuto da $[0, 1]$ identificando gli estremi. Poiché X è connesso per archi, il suo gruppo fondamentale è indipendente dal punto base x_0. Inoltre, essendo K una corona circolare, quindi omotopicamente equivalente a S^1, ha gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}$. Pertanto $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Infine X non è una varietà topologica perché non è localmente euclideo nei punti di $\mathrm{Fr}(K) \times S^1$.