Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Ge110-18 Maggio 2011

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri

Tutorato 9
18 Maggio 2011

1. Esiste un applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suriettiva tale che $ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y + z = 2z = 0\}$?

2. Data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix}$: $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, associata ad un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ (rispetto alla base canonica), è possibile completare A sapendo che f non è iniettiva e che: $f(e_1 + e_2 + e_3) = 2(e_1 + e_2)$?

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da: $f(x, y, z) = (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z)$.
   (a) Dire se f è suriettivo. In caso negativo, determinare un vettore v $t.c.$ $f^{-1}(v) = \emptyset$.
   (b) Dire se f è iniettivo. In caso negativo, determinare due vettori $a, b \in \mathbb{R}^3$ $t.c.$ $a \neq b$ ma $f(a) = f(b)$.
   (c) Sia $E =< u, w >$, dove $u = (1, 0, 1), w = (0, 1, 1)$. Dire se il vettore $x = (4, 3, -2) \in f(E)$.

4. Sia $v := \{v_1 = (0, 0, 2, -1), v_2 = (-1, 1, 2, 1), v_3 = (0, 1, 0, 2), v_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ una base di $\mathbb{R}^4$.
   Calcolare la matrice rappresentativa di $f \in End(\mathbb{R}^4)$, $M_v(f)$, sapendo che $f(v_1) = f(v_2) = v_1 - v_3$, $f(v_3) = v_1$, $f(v_4) = \underline{0}$ e trovare una base di $ker(f)$ e una di $im(f)$.

5. In $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ si considerino le applicazioni lineari: $f : R^4 \longrightarrow R^2, g : R^2 \longrightarrow R^3$ associate, rispettivamente, alle matrici:
   $A = M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Determinare la dimensione e una base sia per $ker(g \circ f)$ sia per $im(g \circ f)$.
   (b) Sia H l'iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_4 = 0$. Determinare la dimensione e una base del sottospazio $G = H \cap ker(g \circ f)$.
   (c) Calcolare $(g \circ f)(H)$ e $(g \circ f)^{-1}(K)$ dove K è l'iperpiano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x_2 = 0$.

6. In $\mathbb{R}^3$ si considerino le basi: $B_1 = \{(1, 1, 1), (0, 2, 3), (1, 0, 3)\}, B_2 = \{(4, 3, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 1)\}$.
   (a) Determinare la matrice P del cambiamento di base da B_1 a B_2.

(b) Determinare la matrice Q del cambiamento di base da B_2 a B_1.

7. In $\mathbb{R}^4$ si considerino le basi:
$B_1 = \{(1, 0, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (-1, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 0)\}$,
$B_2 = \{(1, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, -1), (-1, 0, 1, -1)\}$,
Calcolare $M(\mathbb{I})_{B_1,B_2}$, $M(\mathbb{I})_{B_2,B_1}$, $M(\mathbb{I})_{B_1,e}$, $M(\mathbb{I})_{e,B_1}$, $M(\mathbb{I})_{B_2,e}$ e $M(\mathbb{I})_{e,B_2}$

8. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da: $T(x, y, z, t) = (x + 2y - t, y - 3z, x + 2y + z + t)$

   (a) Scrivere la matrice A che rappresenta T rispetto alle basi canoniche: e di $\mathbb{R}^4$ ed E di $\mathbb{R}^3$.

   (b) Verifica che $C = \{(0, 3, 1), (1, 0, 3), (0, -1, 1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

   (c) Completa i vettori $v = (1, 0, 0, 1)$ e $u = (0, 2, 0, 0)$ a una base B di $\mathbb{R}^4$.

   (d) Scrivi la matrice D associata a T rispetto alle basi C e B.