Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Ge110-11 Maggio 2011

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri

Soluzioni tutorato 8
11 Maggio 2011

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sia $\{i, j, k\}$ base di $\mathbb{R}^3$ t.c.:
$\begin{cases} f(i) = 2i - j \\ f(j) = i + k \\ f(k) = -i + j - k \end{cases}$
Possiamo esprimere la nostra funzione f tramite una matrice in quanto f é una funzione lineare. Per costruire la matrice si sfrutta il fatto che un'applicazione lineare é univocamente determinata dalle immagini dei vettori che costituiscono la base del dominio. Le colonne della matrice rappresentativa, infatti, sono proprio le immagini di questi vettori $\Rightarrow A := (f(i), f(j), f(k)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ dove A é la matrice che mi rappresenta f. Per determinare l'immagine di un vettore $\underline{x}$ del dominio basta moltiplicare la matrice A per quel vettore, ossia:
$$\underline{y} := A\underline{x} \Rightarrow \underline{y} = f(\underline{x})$$
A questo punto per determinare il nucleo mi basta vedere quali sono i vettori che hanno immagine nulla, ossia tutti gli $\underline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ t.c. $A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow$ L'insieme dei vettori $\underline{x} \in Ker(f)$ é equivalente all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$. La matrice A ha rango 2, quindi per il teorema di Rouché Capelli il sistema ammette ∞^1 soluzioni $\Rightarrow$ La nullitá , ossia $dim(Ker(f))$, é 1 $\Rightarrow Ker(f)$ é uno spazio generato da un solo vettore. Per vedere quale vado a risolvermi il sistema:
$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$
che ha come soluzione il vettore $\underline{x} = (z, -z, z), z \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$Ker(f) =< (1, -1, 1) >$.

2. $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ In generale $dim(Im(f)) = r(B)$, B matrice associata a f, mentre $dim(Ker(f)) = n - dim(Im(f))$, dove n é la dimensione del dominio, per il teorema della nullitá piú rango.
Infatti sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\underline{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow \underline{x} = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$ e $f(\underline{x}) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4)$ in quanto f funzione lineare.

$f(\underline{x})$ é dunque combinazione lineare dei vettori immagine della base canonica, ossia $Im(f) =< f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) >$. Tuttavia questi costituiscono le colonne della matrice associata a $f \Rightarrow dim(Im(f)) = r(B)$, ossia il massimo numero di vettori lin. ind. tra i vettori immagine della base.
In questo caso $det(B) = -4$, dunque la matrice ha rango massimo $\Rightarrow$ $dim(Im(f)) = 4$ e $dim(Ker(f)) = 4 - 4 = 0$.

3. $C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R}$
Per quanto detto prima f non é suriettiva $\Leftrightarrow$ il rango di C non é massimo $\Leftrightarrow Det(C) = 0$. $Det(C) = 3h - 6 \Rightarrow Det(C) = 0 \Leftrightarrow h = 2$. A questo punto sostituiamo il valore di h trovato nella matrice C.

   - $dim(Im(f)) = r(C) = 2$ in quanto esiste un minore di ordine 2 non nullo $\Rightarrow$ L'immagine é generata da due vettori lin.ind. che vi appartengano, in quanto la dimensione del sottospazio é 2 (va bene qualsiasi coppia di vettori che soddisfino questi due requisiti)$\Rightarrow$ $Im(f) =< (2, 1, -1), (1, 2, 1) >$.
   - Il vettore $(1, k^2 - k, k) \in Im(f)$ se puó essere scritto come comb.lin. dei vettori che ne costituiscono la base, ossia se é lin.dip. da questi, ossia se:
   $Det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & K^2 - k \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = 1 \pm \sqrt{2}$. Per tali valori di k il vettore appartiene a $Im(f)$.
   - Basta trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ che $\notin Im(f) \Rightarrow$ Sfrutto l'esercizio precedente e sostituisco al vettore un valore di $k \neq 1 \pm \sqrt{2}$, sia $k = 1 \Rightarrow$ Il vettore $(1, 0, 1) \notin Im(f)$.
   - $dim(Ker(f)) = 1$ per il teorema nullitá piú rango. Per trovare il vettore che mi genera il nucleo basta risolvere il sistema omogeneo $C\underline{x} = 0$ che ha soluzioni $(z, -z, z), z \in \mathbb{R} \Rightarrow Ker(f) =< (1, -1, 1) >$.
   - $Ker(f) \cap Im(f) = \underline{x} \Leftrightarrow$ i vettori della base dell'immagine e i vettori della base del nucleo sono lin.ind. tra loro (vedi formula Grassman vettoriale). In questo caso basta verificare che la matrice $A :=$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ abbia rango massimo, ossia $|A| \neq 0$.
   - Per farlo dobbiamo mostrare che il vettore $(3, 2, 2) \in Im(f)$. Ció accade se e solo se il vettore può essere scritto come comb.lin. della base, e quindi é lin.dip. da questi. Dunque considero la matrice $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, dove i primi due vettori colonna sono i vettori della base di $Im(f)$, mentre l'ultimo é il vettore che devo controllare appartenga all'immagine. Quindi se calcolo il determinante di B si presentano due casi:
   a)Se $Det(B) = 0 \Rightarrow$ il vettore é lin.dip. dai vettori che costituiscono

la base di $Im(f)$ e quindi vi appartiene;
b)Se $Det(B) \neq 0 \Rightarrow$ il vettore é lin.ind. dai vettori della base di $Im(f)$, quindi non puó essere scritto come loro comb.lin $\Rightarrow \notin Im(f)$.
In questo caso $Det(B) = 7$.

- Devo determinare quali sono tutti i vettori $\underline{v} = (x, y, z)$ t.c. $f(\underline{v}) = (1, 2, -1)$. Basta risolvere il sistema lineare $C\underline{v} = (1, 2, -1)$ in quanto le soluzioni di questo sistema individuano tutti i vettori $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ che hanno come immagine tramite f proprio il vettore $(1, 2, -1)$. In questo caso il sistema ammette ∞^1 soluzioni del tipo $(2+t, 1-t, t), t \in \mathbb{R}$.

4. **N.B.** Il testo del tutorato é errato le basi rispetto cui devo calcolarmi le matrici associate sono:
$v = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$;
$w = (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1)$.

- La matrice associata a F rispetto la base canonica é la matrice che ha per colonne i vettori immagine della base canonica, in quanto le componenti di un qualsiasi vettore corrispondono alle sue coordinate rispetto alla base canonica.
$F(1, 0, 0) = (1, 1, 2)$;
$F(0, 1, 0) = (0, 2, 3)$;
$F(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$.
$\mathbf{M}_v(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- Analogamente a prima determino i vettori immagine della base v e poi li esprimo in coordinate rispetto la base w.
$G(x, y, z) = (x + z, x + y + z, x + y + 2z, 2x + y + 2z)$
$G(v_1) = (1, 1, 1, 2) = \frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2 + \frac{2}{3}w_3 + \frac{2}{3}$;
$G(v_2) = (0, 1, 1, 1) = w_3$;
$G(v_3) = (1, 1, 2, 2) = w_1 + w_3$.
$\Rightarrow \mathbf{M}_{w,v}(G) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Se la base d'arrivo é la base canonica metto direttamente i vettori immagine in colonna in quanto le componenti di un vettore sono le sue coordinate in base canonica.
$H(x, y, z, t) = (x + 2z + t, x - y - z + t, y - t)$
$H(w_1) = (4, 1, -1)$;
$H(w_2) = (3, -1, 1)$;
$H(w_3) = (3, -1, 0)$;
$H(w_4) = (2, 1, 0)$.
$\Rightarrow \mathbf{M}_{v,w}(H) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Per calcolare $\mathbf{M}_w(I)$, dove $I(x, y, z, t) = (x + z + t, 2x + y + t, x - y - 2z + t, y - z + t)$, applico la seguente:

FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE:
Siano V e W due $K-$spazi vettoriali di dimensione risp. n e m; sia $f : V \to W$ applicazione lineare; siano $v = v_1, \ldots, v_n$ una base di V e $w = w_1, \ldots, w_m$ una base di W; siano e e E basi canoniche risp di V e $W \Rightarrow$

$$\mathbf{M}_{w,v}(f) = (\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}))^{-1}\mathbf{M}_{E,e}(f)\mathbf{M}_{e,v}(\mathbb{I})$$

In questo caso $\Rightarrow$

$$\mathbf{M}_{w}(f) = (\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}))^{-1}\mathbf{M}_{E}(I)\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I})$$

Vado quindi a calcolarmi le due matrici che mi interessano:
$\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I})$ é la matrice associata alla f.ne identitá che ha come base d'arrivo la base canonica in $\mathbb{R}^4$, quindi per ottenerla basterà mettere in colonna le componenti dei vettori della base $w \Rightarrow$:
$\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, mentre la sua inversa é la matrice :
$(\mathbf{M}_{E,w}(\mathbb{I}))^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{M}_{w}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Ora basta sostituire nella formula e moltiplicare le matrici!!!

5. L'applicazione é definita come $F(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$, quindi affinché $F(p(x)) = 0$ dobbiamo imporre $a_1 = a_2 = a_3 = 0 \Rightarrow$ Il nucleo é costituito dai polinomi costanti, cioé $Ker(F) = \mathbb{R}$; per limmagine, notiamo che al variare di a_1, a_2, a_3 si trovano tutti e soli i polinomi di grado due, quindi $Im(F) = P_2$. La matrice rispetto alla base canonica,$1, x, x^2, x^3$ si calcola facilmente ed é: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per trovare la matrice rispetto alla base b si puó usare la formula del cambiamento di base $\mathbf{M}_b(F) = (\mathbf{M}_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1}\mathbf{M}_e(F)\mathbf{M}_{e,b}(\mathbb{I}) \Rightarrow$
$$\mathbf{M}_b(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Risolvendo il sistema proposto nelle variabili $f(i)$,$f(j)$,$f(k)$ otteniamo le componenti dei vettori immagine della base $b = \{i, j, k\}$ risp. la stessa base e possiamo quindi scrivere la matrice rappresentativa dell'endomorfismo f associata a $b \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(i) = 6i + j + k \\ f(j) = 9i + 3k \\ f(k) = -3i + j - 2k \end{cases}$$

da cui costruiamo la matrice:

$$A = \mathbf{M}_b(f) = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

- f é suriettiva $\Leftrightarrow dim(Im(f)) = 3 = r(A)$. Tuttavia $Det(A) = 0 \Rightarrow$ Il rango di A non é massimo, in particolare $r(A) \neq 3 \Rightarrow f$ non é suriettiva. Inoltre $dim(Im(f)) = 2$ (in quanto esiste un minore di ordine due non nullo di A),quindi $dim(Ker(f)) = 1$, da cui f non é iniettiva.

- Per costruire una base di $Im(f)$ basta prendere due vettori che siano lin.ind. e che appartengano all'immagine. Scelgo $f(i) = f(1,0,0) = (6,1,1)$ e $f(j) = f(0,1,0) = (9,0,3)$, quindi $Im(f) =< (6,1,1),(0,1,0) >$. I vettori appartenenti al nucleo di f corrispondono alle soluzioni del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$, con $\underline{x} = (x,y,z)$ vettore generico. In questo caso le soluzioni sono generate dal vettore $(-z,z,z)$,$z \in \mathbb{R} \Rightarrow Ker(f) =< (-1,1,1) >$.

- $\underline{v} = (t+1, 2t, -1) \in Im(f) \Leftrightarrow$ puó essere scritto come comb.lin. dei vettori che compongono la base di $Im(f)$, quindi se é lin. dip. dai due, quindi se:
$Det \begin{pmatrix} t+1 & 6 & 9 \\ 2t & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$, cosa che avviene $\Leftrightarrow t = \frac{4}{5}$

- Sostituendo il valore di t trovato nel punto precedente troviamo il vettore $(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}, -1)$. Per calcolare le componenti del vettore rispetto alla base di $Im(f)$ mi basta trovare a,$b \in \mathbb{R}$ t.c. $(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}, -1) = a(6,1,1) + b(9,0,3)$, da cui otteniamo il sistema: $\begin{cases} \frac{9}{5} = 6a + 9b \\ \frac{8}{5} = a \\ -1 = a + 3b \end{cases}$;
risolvendolo si ricava $a = \frac{8}{5}$ e $b = -\frac{13}{15}$.

- Basta sfruttare quanto fatto in precedenza e prendere un valore di t per cui $\underline{v} \notin Im(f) \Rightarrow$ Scelgo $t = 0$; ne segue che il vettore $\underline{x} = (1,0,-1) \notin Im(f)$.

- $Ker(f)$ e $Im(f)$ sono in somma diretta $\Leftrightarrow Ker(f) \cap Im(f) = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow$ I vettori della base dell'immagine e quelli della base del kernel sono lin.ind.
$\Leftrightarrow Det \begin{pmatrix} 6 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Quest'ultima condizione é in effetti verificata e la somma tra i due sottospazi vettoriali é diretta.

- Per vedere quali sono i vettori $\underline{u}$ t.c. $f(\underline{u}) = (3,4,-1)$ noto che essi corrispondono all'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A\underline{x} = (3,4,-1)$, il quale peró é incompatibile, non ammette soluzioni. Ció implica che il vettore $(3,4,-1) \notin Im(f)$.

7. **(a)** Per vedere qual é la posizione reciproca fra due rette in uno spazio affine di dimensione 3 devo innanzitutto verificare se sono complanari oppure sghembe. Nel caso in cui siano complanari considero poi i vari sottocasi $\Rightarrow$ Due rette sono complanari $\Leftrightarrow Det\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 0.$

Nel nostro caso:
$Det\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = aDet\begin{pmatrix} a & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = a(a^2-a-6) = a(a-3)(a+2) \Rightarrow$
Le due rette sono sghembe per $a \neq 0; 3; -2$.

- Se $a = 0 \Rightarrow$ Le giaciture di r e s coincidono (sono entrambe $W =< (0,0,1) >$), quindi le due rette sono parallele ma non coincidenti, poiché, ad esempio, il punto $(-1,1,0) \in s$, ma $\notin r$;

- Se $a = 3 \Rightarrow$ Le giaciture di r e s sono differenti, rispettivamente $V =< (-3,9,1) >$ e $W =< (0,0,1) >$, quindi sono incidenti(in quanto abbiamo giá dimostrato il fatto che siano complanari per tale valore di a);

- Se $a = -2 \Rightarrow$ Le giaciture di r e s sono differenti, rispettivamente $V =< (2,4,1) >$ e $W =< (0,0,1) >$, quindi sono incidenti(in quanto abbiamo giá dimostrato il fatto che siano complanari per tale valore di a).

(b) Dall'esercizio precedente sappiamo che se $a = -2 \Rightarrow$ le rette sono incidenti,quindi complanari($\exists$ il piano). La giacitura W del piano che le contiene sará dunque generata dai vettori di direzione delle due rette, dunque $W =< (2,4,1), (0,0,1) >$. Quindi per determinare univocamente il piano affine mi basta individuare un punto che vi appartiene, scelgo il punto $(-3,1,0) \in s$. Ora l'equazione cartesiana sará determinata imponendo nullo il determinante della matrice $\begin{pmatrix} x+3 & y-1 & z \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, da cui si ricava l'equazione del piano cercato, ossia $2x - y + 7 = 0$. Infatti considerato un punto generico del piano $P = (x,y,z)$, il vettore $\vec{PQ}$ deve essere generato dalla giacitura del piano, quindi la prima riga della matrice deve essere dipendente dalle altre due, ossia il determinante di tale matrice deve essere nullo.