Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Ge110-11 Maggio 2011

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri

TUTORATO 8
11 MAGGIO 2011

1. Sia data in $\mathbb{R}^3$ la base i, j, k e si consideri l'endomorfismo f dato da:
$\begin{cases} f(i) = 2i - j \\ f(j) = i + k \\ f(k) = -i + j - k \end{cases}$
Trovare una base di $Ker(f)$.

2. Sia f l'operatore di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $Dim(Ker(f))$ e $Dim(Im(f))$.

3. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ cui, rispetto alla base canonica, è associata alla matrice:
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix} : h \in \mathbb{R}$
trovato il valore di h per cui f non è suriettiva:
   (a) determinare $Im(f)$;
   (b) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k)$ appartiene a $Im(f)$;
   (c) trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagini;
   (d) determinare $Ker(f)$;
   (e) verificare che $Ker(f) \cap Im(f) = \{\underline{0}\}$;
   (f) esistono dei vettori $u \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(u) = (3, 2, -2)$?
   (g) Trovare i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = f(x)$, dove $f(x) = (1, 2, -1)$.

4. Siano $v = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $w = \{(1,0,1,1), (1,1,1,0), (0,1,1,1), (1,1,0,1)\}$ due basi rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e F, G, H, I le seguenti applicazioni lineari:
$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (x+z, x+2y, 2x+3y+z)$
$G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 : G(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x+y+2z, 2x+y+2z)$
$H : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : H(x,y,z,w) = (x+2z+w, x+y+z+w, y+w)$
$I : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 : I(x,y,z,w) = (x+z+w, 2x+y+w, x+y+2z+w, y+z+w)$
Determinare le matrici associate a tali applicazioni: $M_v(F), M_{w,v}(G), M_{v,w}(H)$ e $M_w(I)$.

5. Sia P^3 lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata di grado ≤ 3 a coefficienti reali e $F : P^3 \longrightarrow P^3$ l'applicazione lineare tale che $F(X^n) = nX^{n-1}$ (derivata formale), Calcolarne nucleo e immagine e trovare $M_e(F)$ e $M_b(F)$, dove e è la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ e b è la base $\{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}$.

6. In $\mathbb{R}^3$ si consideri l'endomorfismo f dato da:

$$\begin{cases} f(i) - f(j) - f(k) = 0 \\ 2f(i) - f(j) = 3i + 2j - k \\ -f(i) + f(j) = 3i - j + 2k \end{cases}$$

   (a) f è iniettivo? f è suriettivo?
   (b) Trovare $Ker(f)$ e $Im(f)$.
   (c) Determinare $t \in \mathbb{R} \mid v = (t+1, 2t, -1) \in Im(f)$.
   (d) Per il valore di t ottenuto, calcolare le componenti del vettore rispetto alla base di $Im(f)$.
   (e) Trovare un vettore x che non appartiene all'immagine.
   (f) $Ker(f)$ e $Im(f)$ sono in somma diretta?
   (g) Determinare il sottospazio $f^{-1}(u) : u = (3, 4, -1)$.

7. Date le rette:

$$\text{r}: \begin{cases} x + az + 1 = 0 \\ ax + y - 7 = 0 \end{cases}, s: \begin{cases} x + y - a = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases},$$

   (a) studiare la loro posizione reciproca stabilendo per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le rette sono: sghembe, incidenti, parallele, coincidenti.
   (b) Posto $a = -2$, trovare il piano che contiene le due rette.