Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Ge110-6 Aprile 2011

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri

TUTORATO 5
6 APRILE 2011

1. Un semplice esempio: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right)$

2. Sia A in $M_n(\mathbb{R})$ allora verificare che:

   (a) Sia $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ matrice con $a_{1,j_0} = \cdots = a_{n,j_0} = 0$ per qualche $j_0 \in \{1,\dots,n\} \to$ da definizione $det(A) = \sum_{\varphi\in\Phi} \prod_{j=1}^{n} a_{\varphi(j),j} = 0$ (con Φ insieme delle permutazioni di n elementi)
   infatti per ogni termine della somma la produttoria contiene un elemento della colonna j_0-esima ed è dunque nulla, se ne deduce che tutta la somma è nulla assieme al determinante di A

   (b) Nel caso della riga (nel caso della colonna la dimostrazione è analoga): sappiamo che se una riga A_j di A è della forma $A_j = aV + bW \to$ $det(A) = a \cdot det \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ V \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} + b \cdot det \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ W \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix}$ quindi nel nostro caso: supponiamo di aver ottenuto B sommando alla j_1-esima riga di A k-volte la j_2-esima riga di $A \to det(B) = det \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_{j_1} \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} + k \cdot det \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_{j_2} \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} =$ $det(A) + 0$ poichè il secondo termine della somma è il determinante di una matrice avente due righe uguali.

3. $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (9-10) - 2(3-4) = 1$
   $det(B) = 0$ poichè ha tutte le righe uguali (ne bastano due)
   $det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$
   $0 - 2(1-2) = 2$
   $det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 7 = -3$
   $det(E) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$2+2(1-2)=0$
$rank(A)=3, (det(A)\neq 0)$;
$rank(B)=1$ (evidentemente);
$rank(C)=3, (det(C)\neq 0)$;
$rank(D)=3, (det(D)\neq 0)$;
$rank(E)<3, (det(E)=0)$ ma $rank(E)\geq 2$ perché $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow$ $rank(E)=2$ (ho trovato un minore non nullo di ordine 2).

4. Sono invertibili le matrici quadrate di rango massimo quindi possiamo calcolare A^{-1}, C^{-1} e D^{-1} ... lo facciamo con la seguente formula:

$$M^{-1} = \frac{1}{det(A)} Cof(A)^{\mathrm{T}}$$

dove $Cof(A)^{\mathrm{T}}$ è la matrice cofattore di A trasposta.
Le inverse trovate sono:
$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $D^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

5.
   - $Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(a-1+2-a) = 2 \neq 0. \Rightarrow$ Il determinante di A non dipende dal parametro a ed é sempre non nullo; da ció ne segue che la matrice A ha rango massimo, ossia $rank(A)=4$.
   - Il rango puó anche essere visto anche come l'ordine massimo delle sottomatrici quadrate con rango massimo, ossia con determinante non nullo (Principio dei minori orlati) $\Rightarrow$ In questo caso basta considerare che $rank(B) <= 3$e che la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha sempre il determinante $\neq 0$ per concludere che $rank(B)=3$.

6. Per determinare quante sono le soluzioni del sistema lineare $AX=B$, al variare di $a\in\mathbb{R}$ sfrutto il teorema di Rouché Capelli, il quale afferma che il sistema ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice dei coefficienti é uguale al rango della matrice orlata; in tal caso il numero delle soluzioni del sistema é pari a ∞^{n-r} dove n =numero di incognite e r =rango trovato.$\Rightarrow$ $Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a^2-2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & a^2-2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a^2-2 \end{vmatrix} = -a^2+1 \Rightarrow Det(A)=0 \Leftrightarrow a=\pm 1$. Da ció ne segue che ci sono due casi possibili: $rank(A)=3$ se $a\neq\pm 1$ e $rank(A)=2$ se $a=\pm 1$ in quanto posso trovare un minore di ordine 2 con determinante non nullo.

- Se $a \neq \pm 1$ il sistema ammette una sola soluzione per Rouché Capelli e tale soluzione é ottenuta per $X = A^{-1}B$.
- Se $a = 1$ calcolo il rango della matrice orlata. In questo caso tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo $\rightarrow rank(A|B) = 2$ e il sistema ammette ∞^1 soluzioni.
- Se $a = -1 rank(A|B) = 3$ in quanto il minore di ordine 3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo e quindi rango massimo $\Rightarrow$ Il sistema é incompatibile per Rouché-Capelli.

7.
- $2x - y = 2$,∞^1 soluzioni del tipo $(a, 2a-2)$, con $a \in \mathbb{R}$.
- $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$ $\rightarrow$, ∞^1 soluzioni del tipo $(-a + \frac{1}{3}, a, -frac23)$, $a \in \mathbb{R}$.
- $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$ $\rightarrow$, il sistema é incompatibile.
- $\begin{cases} 2x - y - z - 4t = 9 \\ 4x - 3z - t = 0 \\ 8x - 2y - 5z - 9t = 18 \end{cases}$ $\rightarrow$,∞^2 soluzioni del tipo $(\frac{3a+b}{4}, \frac{-18+a-7b}{2}, a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + 3z + t = 7 \end{cases}$ $\rightarrow$, il sistema é incompatibile.
- $\begin{cases} x + z = -2 \\ 2x + y + t = -1 \\ -y - 2t - 2z = 2 \\ 3x - 3y + z + t = 1 \end{cases}$ $\rightarrow$,il sistema ammette una soluzione $(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, 1)$.