Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Ge110- 30 Marzo 2011

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri

TUTORATO 4
30 MARZO 2011

1. Siano U e V due sottospazi vettoriali di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$
   - Provare che $U \cap V \neq \emptyset$
   - Determinare tutte le possibili dimensioni di $U \cap V$ e costruire un esempio in ciascuno dei casi.
2. In $\mathbb{R}^5$ determinare una base e la dimensione della somma dei due sottospazi:
   $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | 2x_1 - x_2 - x_3 = x_4 - 3x_5 = 0\}$,
   $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0\}$.
   stabilire inoltre se la somma e diretta, se nn lo è calcolare la dimensione dell'intersezione.
3. Data la matrice: $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$
   - provare che i sottoinsiemi:
     $F = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) | AX = XA\}$,
     $G = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) | AX = -XA\}$;
     sono sottospazi vettoriali e trovare una base per ciascuno di essi.
   - Determinare una base per i sottospazi vettoriali F, G e $F + G$.
   - Data la matrice: $C = \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-3 \end{pmatrix}$: $h \in R$ stabilire per quale valore di h la matrice C appartiene al sottospazio vettoriale $F + G$.
   - Assegnato ad h tale valore, trovare due matrici $C_1 \in F$ e $C_2 \in G$ in modo tale che $C = C_1 + C_2$.
4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i sottospazi:
   $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$,
   $K =< (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)) >$.
   - Calcolare la dimensione e una base di H e K.
   - Calcolare la dimensione e una base di $H + K$. Si tratta di una somma diretta?
5. Sono dati, in $\mathbb{R}^4$, i sottospazi vettoriali: $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y = 2t = 0\}$,
   $K =< (1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5) >$.
   - Determinare la dimensione e una base sia di H che di K.
   - Determinare la dimensione e una base sia di $H \cap K$ che di $H + K$.

- Il vettore $v = (1,2,3,4)$ appartiene a $H+K$? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di H e uno di K.

6. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$