Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Soluzione tutorato di Ge110- 23 Marzo 2011

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri

Tutorato 3
23 Marzo 2011

1. Dire se i seguenti insiemi di vettori formano una base per lo spazio che generano ed in caso contrario esibire un loro sottoinsieme che sia base: (si svolgerà solo il primo per esempio e degli altri si riporteranno le soluzioni)

- $\{(1,2,1),(2,2,4),(2,3,3)\}$

  Consideriamo la matrice orlata $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$ le cui soluzioni sono le combinazioni lineari dei tre vettori che danno il vettore nullo (se l'unica combinazione lineare è quella banale allora i vettori sono l.i.) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 0\end{pmatrix} -_1 \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix} -_2 \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ e le soluzioni sono $\begin{cases} x_1 = t\\ x_2 = -t/2\\ x_3 = -t\end{cases}$ dunque non banali (i vettori sono linearmente dipendenti) ed inoltre le soluzioni sono le possibili combinazioni lineari nulle dei tre vettori, possiamo dunque esprimere uno in funzione degli altri mediante i coefficenti trovati, una delle basi è: $\{(1,2,1),(2,3,3)\}$

  $(-_1) : \begin{cases} N_1 = V_1\\ N_2 = V_2 - 2V_1\\ N_3 = V_3 - V_1\end{cases}$ $(-_2)$: tolgo la terza riga in quanto dipendente dalla seconda.

  Osserviamo per amor di chiarezza che la base data è solo una delle possibili scelte di basi dello spazio ma che il numero di vettori che la compongono è univocamente determinato dallo spazio.

- $\{(1,1,1,1),(3,4,1,0),(0,1,1,2)\}$

  I vettori sono l.i. dunque formano una base per lo spazio

- $\{(0,5,3),(1,5,3),(1,0,1)\}$

  I vettori sono l.i. dunque formano una base per lo spazio

- $\{(1,0,0,3),(7,4,3,1),(2,2,4,6),(8,5,5,4),(8,4,3,4)\}$

  una base è $\{(1,0,0,3),(7,4,3,1),(2,2,4,6)\}$

2. Dati i vettori:
   $a := (1,1,2)$
   $b := (2,-1,3)$
   $c := (3,0,h)$
   Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i vettori sono linearmente indipendenti.

   Imposto il sistema omogeneo che ha per colonne i vettori dati e lo riduco a gradini in funzione di h e trovo che per $h = 5$ mi si annulla una riga quindi per quel valore (e solo per quello) i vettori sono l.d.

3. Dati i seguenti vettori:
   $a := (1,3,2)$
   $b := (-2,k-6,k+4)$
   $c := (-1,k-3,k^2+k+1)$
   $d := (0,-2,k-1)$

   - Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\{a,b,c\}$ sono linearmente indipendenti.

     Questo punto è concettualmente uguale al primo ma leggermente più complesso: i valori di k trovati sono $k \notin \{0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

   - Posto $k = 2$ determinare le componenti del vettore d rispetto alla base $\{a,b,c\}$

     Imposto il sistema come prima ma lo orlo con il quarto vettore ed in questo modo le soluzioni sono i coefficenti della combinazione lineare di $\{a,b,c\}$ che da d: le soluzioni sono: $\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 10 \\ x_3 = -11 \end{cases}$

4. Dati i vettori: $u := (1,3,2)$ e $v := (-2,1,1)$

   - Verificare che $V :=< u, v >$ ha dimensione 2

     Imposto il sistema omogeneo usuale ottenendo l'unica soluzione è banale dunque i vettori sono l.i. e generano perciò un sottospazio di dimensione 2 (osservando che i due vettori non sono proporzionali ci saremmo risparmiati tutto questo)

- Trovare per quali valori di t il vettore $a := (t, 0, -1) \in V$ e per tali valori, determinare le sue componenti rispetto ai vettori u e v.

  Cerco una combinazione lineare di u e v tale che le seconde due componenti di u e v diano le seconde due componenti di a: la combinazione è $u - 3v$. A questo punto impongo $t = u_1 - 3v_1 = 7$ e ottengo che a è combinazione lineare di u e v con componenti $(1, -3)$.

5. Sia W_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori:
   $a := (1, 1, -1)$ $b := (2, -1, 1)$
   Sia W_2 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori:
   $c := (1, 2, -1)$ $d := (-1, -1, 2)$
   Trovare $W_1 \cap W_2$ e una sua base.

   Impostiamo il sistema omogeneo che ha per colonne i quattro vettori delle due basi ottenendo come soluzione: $\begin{cases} X_1 = \frac{8}{3}t \\ X_2 = -\frac{1}{3}t \\ X_3 = -t \\ X_4 = t \end{cases}$. Abbiamo usato un parametro dunque $Dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Per trovare una base di $W_1 \cap W_2$ imponiamo $t = 3$ e dalle soluzioni otteniamo: $8V_1 - V_2 - 3V_3 + 3V_4 = \underline{0} \Rightarrow$ $8V_1 - V_2 = 3V_3 - 3V_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$ cioè il $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $W_1 \cap W_2$

6. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori:
   $a := (1, 1, 1, 0), b := (0, 1, 1, 1), c := (1, 1, 0, 0)$.

   - Verificare che sono linearmente indipendenti.
     Impostiamo in maniera usuale il sistema omogeneo e otteniamo che l'unica soluzione è banale, quindi, si, i vettori sono l.i..

   - Determinare un vettore d in modo che a, b, c, d siano linearmente indipendenti.
     Prendiamo la matrice di prima e questa volta la orliamo con il vettore (x, y, w, z) cercando un valore di $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ per cui il sistema non abbia soluzione. Il sistema non ha soluzione se $y - x - z \neq 0$ e $w \in \mathbb{R}$ dunque il vettore $(1, 0, 0, 0)$ è l.i. con gli altri tre.

   - Dire se il sottospazio $H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | y = z + t = 0\}$ è contenuto in $K :=< a, b, c >$.
     i vettori di H sono banalmente della forma $(x, 0, z, -z)$: per determinare una base dello spazio imponiamo prima $x = 1$ e $z = 0$, ottenendo $(1, 0, 0, 0)$; poi $x = 0$ e $z = 1$ ottenendo $(0, 0, 1, -1)$. La base cercata è dunque $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$. Ma abbiamo gia mostrato

che $(1,0,0,0) \notin K$ e dunque la risposta è, no.

7. In $\mathbb{R}^5$ si consideri l'insieme:
$W_1 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}$.

- Si verifichi che W_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, se ne determini una base e la dimensione.
W_1 è l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari in $\mathbb{R}^5$ è dunque un sottospazio vettoriale di dimensione: (potenza di $\mathbb{R}$) - (n. equazioni) $= 5 - 2 = 3$. I vettori di W_5 sono della forma $(2x_2, x_2, 0, x_4, x_5)$ Dunque al solito imponiamo il primo parametro 1 e gli altri 0, poi, il secondo... etc. ottenendo la base $\{(2,1,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$.

- Sia $W_2 :=< a, b, c, d >$, dove:
$a := (0, 3, 1, -2, 0)$,
$b := (0, 0, 2, 1, 1)$,
$c := (0, 6, -10, -10, -6)$,
$d := (0, 3, 7, 1, 3)$,
se ne determini una base e la dimensione.
Imponiamo il sistema omogeneo che ha come colonne i vettori di W_1 e cerchiamone le soluzioni: $\begin{cases} x_1 = 2v + t \\ x_2 = -6v + 3t \\ x_3 = v \\ x_4 = t \end{cases}$
$\Rightarrow (2v + t)a + (-6v + 3t)b + (v)c + (t)d = \underline{0}$ per qualsiasi scelta di u e v $\Rightarrow$ imponendo $v = 1$ e $t = 0$ otteniamo che c è combinazione lineare di a e b, poi, imponendo $v = 0$ e $t = 1$ otteniamo che d è combinazione lineare di a e b, dunque la base cercata è $\{a, b\}$.

- Si provi che $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^5$
Imponendo il sistema omogeneo che ha per colonne i vettori della base di W_1 e quelli della base di W_2 si ottiene che i vettori sono l.i. dunque l'intersezione è $\emptyset$ e la somma è diretta.

- Si determini un sottospazio W_3 di $\mathbb{R}^5$ tale che $dim(W_1 \cap W_3) = 1$ e $dim(W_3) = 3$.
Definiamo W_3 mediante la sua base: $W_3 =< (0, 3, 1, -2, 0), (0, 0, 2, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 0) >$

8. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} C := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$e si esprima la matrice

$$E := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

nella base K.

Interpretiamo le matrici come vettori di $\mathbb{R}^4$ della forma $M \approx (m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})$ ed utilizziamo il solito sistema per verificare l'indipendenza delle quattro matrici. Poi imponendo il sistema che ha per colonne le matrici della base portate a vettori e orlandolo con la matrice E portata a vettore (coerentemente con il modello soprascritto) e la soluzione di questo sistema è la combinazione lineare di $\{A, B, C, D\}$ che da E.

Le soluzioni sono: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -1 \end{cases}$.