Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Ge110- 23 Marzo 2011

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri

TUTORATO 3
23 MARZO 2011

1. Dire se i seguenti insiemi di vettori formano una base per lo spazio che generano ed in caso contrario esibire un loro sottoinsieme che sia base:
   - $\{(1,2,1),(2,2,4),(2,3,3)\}$
   - $\{(1,1,1,1),(3,4,1,0),(0,1,1,2)\}$
   - $\{(0,5,3),(1,5,3),(1,0,1)\}$
   - $\{(1,0,0,3),(7,4,3,1),(2,2,4,6),(8,5,5,4),(8,4,3,4)\}$
2. Dati i vettori:
   $a := (1,1,2)$
   $b := (2,-1,3)$
   $c := (3,0,h)$
   Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i vettori sono linearmente indipendenti.
3. Dati i seguenti vettori:
   $a := (1,3,2)$
   $b := (-2,k-6,k+4)$
   $c := (-1,k-3,k^2+k+1)$
   $d := (0,-2,k-1)$
   - Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\{a,b,c\}$ sono linearmente indipendenti.
   - Posto $k = 2$ determinare le componenti del vettore d rispetto alla base $\{a,b,c\}$
4. Dati i vettori: $u := (1,3,2)$ e $v := (-2,1,1)$
   - Verificare che $V :=< u,v >$ ha dimensione 2;
   - Trovare per quali valori di t il vettore $a := (t,0,-1) \in V$ e per tali valori, determinare le sue componenti rispetto ai vettori u e v.
5. Sia W_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori:
   $a := (1,1,-1)$ $b := (2,-1,1)$
   Sia W_2 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori:
   $c := (1,2,-1)$ $d := (-1,-1,2)$
   Trovare $W_1 \cap W_2$ e una sua base.
6. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori:
   $a := (1,1,1,0), b := (0,1,1,1), c := (1,1,0,0)$.
   - Verificare che sono linearmente indipendenti.

- Determinare un vettore d in modo che a, b, c, d siano linearmente indipendenti.
- Dire se il sottospazio $H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | y = z+t = 0\}$ è contenuto in $K :=< a, b, c >$.

7. In $\mathbb{R}^5$ si consideri l'insieme:
$W_1 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}$.
    - Si verifichi che W_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, se ne determini una base e la dimensione.
    - Sia $W_2 :=< a, b, c, d >$, dove:
    $a := (0, 3, 1, -2, 0)$,
    $b := (0, 0, 2, 1, 1)$,
    $c := (0, 6, -10, -10, -6)$,
    $d := (0, 3, 7, 1, 3)$,
    se ne determini una base e la dimensione.
    - Si provi che $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^5$
    - Si determini un sottospazio W_3 di $\mathbb{R}^5$ tale che $dim(W_1 \cap W_3) = 1$ e $dim(W_3) = 3$.

8. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:
$a := (1, 1, 0)$,
$b := (0, 1, -1)$,
$d := (2, 3, -1)$. Considerata l'equazione vettoriale:
$$x_1 a + x_2 b + x_3 c = d$$
, determinare, se possibile, un vettore $c := (x, y, z)$ nei seguenti casi:
    - L'equazione vettoriale non ammette soluzioni;
    - L'equazione vettoriale ammette una sola soluzione;
    - L'equazione vettoriale ammette infinite soluzioni.
    - Quando è possibile determinare le soluzioni dell'equazione vettoriale considerata.

9. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} C := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$e si esprima la matrice
$$E := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
nella base K.