Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Soluzione tutorato di Ge110-25 Maggio 2011

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Dario Giannini e Massimo De Mauri

SOLUZIONE TUTORATO 10
25 MAGGIO 2011

1. **(a)** La funzione che ad ogni matrice associa il suo determinante NON é un'applicazione lineare. In generale, infatti, siano $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, $Det(A+B) \neq Det(A) + Det(B)$. Come controesempio basta prendere:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
in questo caso $Det(A) + Det(B) = 0 \neq 1 = Det(A + B)$.
(b) La traccia di una matrice é definita come la somma degli elementi sulla diagonale principale, quindi $Tr := M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dove $M_3(\mathbb{R})$ é uno sp. vett. di dimensione 9. Siano $A, B \in M_3(\mathbb{R}), k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ per come é definita la traccia $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$ e $Tr(kA) = kTr(A)$, segue subito dal fatto che la somma é commutativa nello spazio d'arrivo, ossia in $\mathbb{R}$.
L'applicazione é suriettiva in quanto $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists M \in M_3(\mathbb{R})$ t.c. $Tr(M) = x$, infatti basta prendere in considerazione la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$.
Per il teorema della nullitá piú rango $dim(Ker(Tr)) = dim(M_3(\mathbb{R})) - dim(Im(Tr)) = 9 - 1 = 8$. Quindi la matrice tipo del nucleo deve avere 8 parametri liberi. Gli elementi della matrice che non sono sulla diagonale possono variare a piacimento (dunque ognuno di essi costituisce un parametro libero), mentre quelli sulla diagonale devono essere t.c. la loro somma sia nulla (in quanto il nucleo é definito come l'insieme degli elementi del dominio che vengono mandati tramite l'appl. nello zero del codominio) $\Rightarrow Ker(Tr) := \{M \in M_3(\mathbb{R}) : M = \begin{pmatrix} x & a & b \\ d & y & c \\ e & f & -x-y \end{pmatrix}$,dove $a, b, c, d, e, f, x, y \in \mathbb{R}\}$.

2. - Gli autovalori di una matrice sono le radici del polinomio caratteristico; questo si ottiene ponendo uguale a 0 il determinante della matrice $A - \lambda\mathbb{I}$, in questo caso:
$P_\lambda(A) = Det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \&2-\lambda & \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 2) = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = 2; \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$.
Gli autospazi relativi ai vari autovalori λ_i, V_{λ_i}, corrispondono al nucleo dell'applicazione lineare rappresentata dalla matrice $A - \lambda_i\mathbb{I}$, quindi gli elementi dell'i-esimo autospazio sono tutte e sole le soluzioni del sistema omogeneo $(A - \lambda_i\mathbb{I})\underline{x} = \underline{0}$, dove $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$. Gli autospazi sono generati proprio dagli autovettori della matrice. In questo caso:

$V_{\lambda_1} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} =$
$= \{(-t, 0, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow (-1, 0, 1)$ é un autovettore relativo all'autovalore 2.
Allo stesso modo si trova che:$V_{\lambda_2} =< (1, -\sqrt{2}, 1) >$ e
$V_{\lambda_3} =< (1, \sqrt{2}, 1) >$.
Affinché la matrice sia diagonale deve accadere che per ogni autovalore la molteplicita algebrica (ossia il numero di volte che l'autovalore compare come radice del polinomio caratteristico) sia uguale alla molteplicitá geometrica(ossia la dimensione dell'autospazio relativo). In generale la prima é sempre maggiore o uguale della seconda. Se trovo tutti autovalori distinti, come in questo caso, la matrice é diagonalizzabile, in quanto se λ é un autovettore il suo autospazio associato deve avere dimensione maggiore o uguale a 1 e la molt. algebrica é uguale a 1. Per quanto detto prima segue subito la diagonalizzabilitá della matrice.

- B $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 4 - \sqrt{2}$; $\lambda_3 = 4 + \sqrt{2}$.
  $V_{\lambda_1} =< (2, -3, 1) >$; $V_{\lambda_2} =< (4 + 3\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 1) >$;
  $V_{\lambda_3} =< (4 - 3\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}, 1) >$. Diagonalizzabile.
- C $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 3$.
  $V_{\lambda_1} =< (-1, 0, 2) >$; $V_{\lambda_2} =< (0, 1, 0) >$; $V_{\lambda_3} =< (2, 0, 1) >$.
  Diagonalizzabile.
- D $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$(con molteplicitá algebrica 2); $\lambda_3 = 3$.
  $V_{\lambda_1} =< (1, 1, 1, 0) >$; $V_{\lambda_2} =< (0, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0) >$;
  $V_{\lambda_3} =< (1, -2, 1, 0) >$. Diagonalizzabile in quanto tutti gli autovalori hanno molteplicitá algebrica uguale alla molteplicitá geometrica.
- E $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$(con molteplicitá algebrica 2); $\lambda_3 = 2$.
  $V_{\lambda_1} =< (0, 1, 1, 0) >$; $V_{\lambda_2} =< (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0) >$;
  $V_{\lambda_3} =< (0, -1, 1, 0) >$. Diagonalizzabile in quanto tutti gli autovalori hanno molteplicitá algebrica uguale alla molteplicitá geometrica.

3. **i)**In generale λ é un autovalore per l'applicazione f rappresentata dalla matrice $A \Leftrightarrow Det(A - \lambda\mathbb{I} = 0)$. Infatti affinché λ sia un autovalore é necessario che il suo autospazio associato non sia banale, ossia che non consista del solo vettore nullo. Quindi anche il nucleo di $A - \lambda\mathbb{I}$ deve essere non banale, ossia l'applicazione a esso associata non deve essere iniettiva, e quindi neanche un isomorfismo. Poiché g é un isomorfismo se e solo se la matrice a esso associata ha determinante non nullo, segue quanto affermato in precedenza.
   In questo caso devo verificare per quali valori di a, $\lambda = 1$ é un autovettore, quindi quando $Det(A - 1\mathbb{I}) = 0 \Rightarrow Det \begin{pmatrix} a-1 & 2 & a-1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 4a \Rightarrow$
   1 é un autovalore per $A \Leftrightarrow a = 0$.
   ii) Posto $a = 0$ $\exists$ tre autovettori lin. ind. se e solo se la matrice A é diagonalizzabile; infatti solo nel caso in cui é possibile scrivere A in forma diagonale si puó scrivere una base dello spazio d'arrivo costituita di soli au-

tovettori. In questo caso: $P_\lambda(A) = Det(\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -2 \\ -4 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix}) = 0 \Rightarrow$ $P_\lambda(A) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow A$ é diagonalizzabile se l'autospazio relativo all'autovalore 1 ha dimensione 2. Posto $\lambda = 1$, affinché A sia diagonalizzabile il rango di $A - 1\mathbb{I}$ deve essere 1; in questo modo per Rouché-Capelli il sistema omogeneo avrá ∞^2 soluzioni, quindi l'autospazio relativo all'autovalore 1 avrá dimensione 2. Tuttavia $r(A - \mathbb{I}) = 2$, in quanto esiste un minore orlato di ordine due non nullo. Quindi per l'autovalore 1 la molteplicitá algebrica$(= 2)$ é diversa da quella geometrica$(= 1)$, quindi la matrice non é diagonalizzabile, quindi non posso trovare tre autovettori lin. indip.

4. $Det(A) = -h^2(h-1)^2$ dunque perché il rango di A sia minore di tre ci basta imporre $det(A) = 0$ i.e. $h = 1$ o $h = 0$.

   Posto $h = 1$ nella matrice A: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 1)$ (polinomio caratteristico di A), dunque abbiamo trovato tre autovalori: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1$ con molteplicità algebrica rispettivamente $\mu_1 = 1; \mu_2 = 1; \mu_3 = 1$, cerchiamo gli autospazi associati:
   In generale sapendo che λ_x è autovalore della matrice Y e volendo conoscere l'autospazio associato a λ_x, V_x, non dobbiamo far altro che risolvere il sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficenti: $Y - \lambda_x(I)$ e le soluzioni del sistema saranno il nostro autospazio.
   Con questo metodo troviamo: $V_1 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) >; V_2 =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >;$

   $V_3 =< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} >$

   (b) A è diagonalizzabile, infatti abbiamo trovato che ogni autovalore ha molteplicità algebrica μ_i e molteplicità geometrica h_i (dimensione dell'autospazio associato) uguali. (PS in generale se in una matrice $n \times n$ trovo n autovalori reali con moltepliciià algebrica 1, dato che $1 \leq h_i \leq \mu_i = 1$ per $i = 1, \ldots, n \Rightarrow h_i = \mu_i = 1$ i.e. la matrice è diagonalizzabile).

5. La matrice considerata ha determinante nullo, dunque un nucleo non banale, il quale è da considerare l'autospazio associato all'autovalore 0, quindi cerchiamo il nucleo dell'applicazione associata alla matrice nel modo usuale (risolviamo il sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficenti la nostra matrice) e vediamo subito che il sistema ha una sola riga indipendente allora la dimensione del nucleo, e dunque la moltiplicità geometrica di 0 come autovalore, è $5 - 1 = 4$ dunque la sua molteplicità algebrica è maggiore uguale a 4. Vogliamo determinare la molteplicità algebrica di 0 per scrivere il polinomio caratteristico: notiamo che il vettore $1, 1, 1, 1, 1)$ viene mandato dalla matrice nel vettore $(20, 20, 20, 20, 20)$, dunque anche

20 è autovalore con molteplicitá geometrica almeno 1 $\Rightarrow$ la molteplicitá algebrica di 20 è almeno 1 $\Rightarrow$ la molteplicitá algebrica di 0 è esattamente 4 $\Rightarrow$ la molteplicitá algebrica di 20 è esattamete 1 $\Rightarrow$ il polinomio caratteristico della matrice è, a meno del segno, $P(\lambda) = \lambda^4(20 - \lambda)$

6. Supponiamo che la matrice A rappresenti l'operatore T nella base canonica e di $\mathbb{R}^3$.

   (a) $det(A) = 7 \Rightarrow A$ è invertibile e $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(Cof(A))^t = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$;

   (b) $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = -(\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 7; \lambda_2 = 1$ con $\mu_1 = 1; \mu_2 = 2$
   Calcolando gli autospazi nel modo usuale: $V_1 =< \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} >$;
   $V_2 =< \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} >$.
   OSS: abbiamo trovato che la molteplicitá algebrica degli autovalori corrisponde alla loro molteplicità geometrica dunque $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ e mettendo assieme le basi degli autospazi otteniamo la base: $\underline{d} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ diagonalizzante per A

   (c) Secondo la base $\underline{d}$ la matrice che rappresenta l'operatore associato ad A è $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice diagonale).
   Quindi sappiamo che applicando le regole del cambiamento di base: $M_{\underline{d},e}(\mathbb{I}) A M_{e,\underline{d}}(\mathbb{I}) = D \Rightarrow P^{-1} = M_{\underline{d},e}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ che si ottiene mettendo in colonna le componenti dei vettori della base $\underline{d}$ rispetto alla base canonica $\Rightarrow P = M_{e,\underline{d}}(\mathbb{I}) = (M_{\underline{d},e}(\mathbb{I}))^{-1}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

7. (a) $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ dunque abbiamo trovato due autovalori: $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$; con molteplicità algebrica rispettivamente $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 2$, cerchiamo gli autospazi associati nel modo usuale trovando $V_1 =< (1, 1, 2) >; V_2 =< (1, -6, 0), (0, 3, 1) >$ dunque A è diagonalizzabile e $\underline{d} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una delle sue basi diagonalizzanti.

   (b) $M_{\underline{d}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (c) Come nell'esercizio precedente, per le regole del cambiamento di base: $M_{\underline{d},e}(\mathbb{I}) M_e(T) M_{e,\underline{d}}(\mathbb{I}) = M_{\underline{d}}(T) \Rightarrow P^{-1} = M_{\underline{d},e}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

che si ottiene mettendo in colonna le componenti dei vettori della base $\underline{d}$ rispetto alla base canonica $\Rightarrow P = M_{e,\underline{d}}(\mathbb{I}) = (M_{\underline{d},e}(\mathbb{I}))^{-1}) = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -12 & -2 & 7 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}. .$

Buono studio ed in bocca al lupo per l'esame,
Massimo De Mauri e Dario Giannini