Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011
GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare
Appello C – 24 Gennaio 2012

Esercizio 1. (11 punti) Nello spazio affine $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ si denotino con (x, y, z) le coordinate del generico punto rispetto al riferimento affine standard e, per ogni $h \in \mathbf{R}$, si considerino la retta $\mathcal{R}_h$ di equazioni parametriche $x = 1 + (h-1)t, y = 1 + t, z = 1$ $(t \in \mathbf{R})$, e i piani $\mathcal{P}_h$ e $\mathcal{Q}$ di equazioni cartesiane, rispettivamente, $x + (1-h)y + z = 0$ e $2x + y + z = 1$.

(i) Si verifichi che $\mathcal{S}_h := \mathcal{P}_h \cap \mathcal{Q}$ è una retta, per ogni $h \in \mathbf{R}$.

(ii) Al variare di $h \in \mathbf{R}$, si studi la posizione reciproca di $\mathcal{R}_h$ e $\mathcal{S}_h$, precisando se e quando tali rette sono incidenti, coincidenti, parallele o sghembe.

(iii) Per il/i valore/i di h per cui le rette $\mathcal{R}_h, \mathcal{S}_h$ sono complanari, si determini l'equazione cartesiana del piano che le contiene entrambe.

(iv) Sia Q la giacitura di $\mathcal{Q}$ e, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, si consideri il vettore $\mathbf{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ -4 \\ 2\lambda \end{pmatrix}$. Si determinino i valori di λ per cui $\mathbf{R}^3 = Q \oplus < \mathbf{v}_\lambda >$.

Esercizio 2. (11 punti) Sia T un'indeterminata su $\mathbf{R}$, e sia $\varphi : \mathbf{R}[T]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbf{R}[T]_{\leq 3}$ la funzione definita ponendo $\varphi(f(T)) := f(T-1) - f(T+1)$, per ogni $f(T) \in \mathbf{R}[T]_{\leq 3}$.

(i) Si verifichi che φ è un operatore lineare, e si trovino le matrici $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\varphi)$, $M_{\mathcal{A}\mathcal{E}}(\varphi)$, essendo $\mathcal{E} := \{1, T, T^2, T^3\}$ e $\mathcal{A} := \{T-1, T+1, T^2, T^3\}$.

(ii) Si determini dimensione e una base di immagine e nucleo di φ.

(iii) Si discuta la diagonalizzabilità di φ.

(iv) Si determini, se esiste, il più piccolo intero positivo n tale che $\varphi^n = 0$.

Esercizio 3. Si risolva ciascuna delle seguenti questioni, con un argomento chiaro e conciso.

(i) (3 punti) Si consideri l'insieme $V := \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, con la sua naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbf{R}$. Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi $W := \mathbf{R} \times \mathbf{C}$, $U := \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ di V si dica se è un $\mathbf{R}-$sottospazio vettoriale di V e in tale caso se ne determini una base

(ii) (3 punti) Sia A una matrice quadrata. Si dimostri che se A^2 è invertibile allora anche A è invertibile.

(iii) (4 punti) Sia V l'insieme dei numeri reali x tali che $x > 0$. Si definisca in V una operazione di "somma" ponendo

$$x \boxplus y = xy$$

per ogni $x, y \in V$. Si definisca una operazione di "prodotto per scalari" ponendo

$$\alpha \odot x = x^\alpha$$

Si dimostri che V, con le operazioni $\boxplus, \odot$, è uno spazio vettoriale reale.