Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2010/2011
GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare
Appello A – 14 Giugno 2011

Esercizio 1. (15 Pt.) Sia $\mathcal{E} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ e, per ogni $h \in \mathbf{R}$, sia $\mathbf{v} := h\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{w} := \mathbf{e}_1 + h\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{u} := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + h\mathbf{e}_3$. Inoltre, si ponga

$$X :=< \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} >_{\mathbf{R}}, \quad Y :=< \mathbf{v}, \mathbf{w} >_{\mathbf{R}}, \quad Z := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x + y - z = 0 \right\}$$

(i) Si determini, al variare di $h \in \mathbf{R}$, $\dim(X), \dim(Y), \dim(Y \cap Z)$, precisando, inoltre, quando la somma $Y + Z$ è diretta e quando $X = Y$.

D'ora in poi, sia $h = -2$.

(ii) Si verifichi che il sottospazio affine $\mathcal{P}$ di $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ avente giacitura Y e passante per $P(1, 0, 0)$ è un piano, se ne determini un'equazione cartesiana, rispetto al riferimento affine standard, e si provi che ogni retta con direzione $T :=< \mathbf{w} + \mathbf{u} >_{\mathbf{R}}$ è parallela a $\mathcal{P}$.

(iii) Detta $\mathcal{R}$ la retta passante per $Q(1, 1, 0)$ e avente direzione T, si trovino equazioni cartesiane dell'unica retta $\mathcal{S}$ passante per P, contenuta in $\mathcal{P}$ e parallela a $\mathcal{R}$, e un'equazione del piano contenente $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

(iv) Si determinino equazioni cartesiane delle eventuali rette passanti per $R(0, 1, 1)$ e complanari sia con $\mathcal{R}$ che con $\mathcal{S}$.

(v) Dopo aver verificato che $\mathcal{B} := \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è una base di Y, si dimostri che esiste un'unica involuzione lineare $\sigma : Y \longrightarrow Y$ tale che $\sigma(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$, e si determini $M_{\mathcal{BB}}(\sigma)$ (si ricorda che un'applicazione $f : I \longrightarrow I$ di un insieme non vuoto I in sè è un'involuzione se $f \circ f = \mathrm{Id}_I$). (*Suggerimento:* si osservi che $\{\mathbf{v} + \mathbf{w}, 2\mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ è una base di Y).

Esercizio 2. (10 Pt.) Sia $\varphi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito ponendo

$$\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{pmatrix}$$

Si studi la diagonalizzabilità di φ e si trovi, se esiste, una base di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di φ.

Esercizio 3. Si risolvano, con un argomento chiaro e conciso, le seguenti questioni.

(i) (3 Pt.) Si esibisca una base $\mathcal{C}$ di $\mathbf{C}^3$ come $\mathbf{C}-$spazio vettoriale e una base $\mathcal{R}$ di $\mathbf{C}^3$ come $\mathbf{R}-$spazio vettoriale.

(ii) (3 Pt.) Sia $A \in M_{4,3}(\mathbf{R}), \mathbf{x} \in M_{3,1}(\mathbf{R}), \mathbf{b} \in M_{4,1}(\mathbf{R})$. Sapendo che il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è incompatibile e che il rango della matrice completa $(A|\mathbf{b})$ è 2, si determinino tutti e soli i possibili valori della dimensione del nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ tale che $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$.

(iii) (3 Pt.) Nello spazio affine $\mathbf{A}^4_{\mathbf{R}}$ siano (x, y, z, t) le coordinate del generico punto rispetto al riferimento affine standard. Considerati, per ogni $h \in \mathbf{R}$, gli iperpiani $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ di equazioni rispettivamente $hx + y + z = h$ e $x + hy + z = 2h - 1$, si trovino i valori di h per cui $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ e, per ciascuno di tali valori, si calcoli $\dim(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$.