Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

Tutorato numero 9 (7 Maggio 2009)
Applicazioni lineari e matrici associate

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili ai seguenti indirizzi:
http://www.lifedreamers.it/liuck/ *http://www.mat.uniroma3.it/*

1. Scrivere le matrici di cambiamento di base $M_{a,b}(\mathbb{I})$ e $M_{b,a}(\mathbb{I})$, dove a e b sono le seguenti basi di $\mathbb{R}^n$:
   (a) n=3 $a = \{(1,0,1),(2,1,1),(0,2,1)\}$ $b = \{(-1,1,0),(0,1,-1),(-1,1,-1)\}$
   (b) n=3 $a = \{(1,0,-1),(1,-1,-1),(0,2,1)\}$ $b = \{(1,2,3),(0,2,1),(0,1,2)\}$
   (c) n=4 $a = \{(1,0,-1,1),(0,0,1,1),(-1,0,1,0),(0,2,1,0)\}$
   $b = \{(1,1,0,1),(-1,0,1,0),(1,0,1,-1),(-1,0,1,-1)\}$
   (d) n=4 $a = \{(0,0,1,0),(-1,1,1,0),(1,-1,1,1),(0,1,1,0)\}$
   $b = \{(1,0,1,1),(1,-1,0,-1),(-1,-1,0,0),(0,1,0,1)\}$

2. Siano $v = \{(1,1,-1),(1,-1,-1),(-1,-1,-1)\}$ e $w = \{(1,0,1,-1),(-1,1,1,0),(0,0,1,-1),(1,0,-1,-1)\}$ due basi rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e F, G, H, I le seguenti applicazioni lineari:
   $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x,y,z) = (x+z, x+2y, 2x+3y+z)$
   $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, G(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x-y+2z, 2x+y+2z)$
   $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, H(x,y,z,w) = (x+2z+w, x-y-z+w, y-w)$
   $I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, I(x,y,z,w) = (x+z+w, 2x+y+w, x-y-2z+w, y-z+w)$
   Determinare le matrici associate a tali applicazioni $M_v(F)$, $M_{w,v}(G)$, $M_{v,w}(H)$ e $M_w(I)$.

3. Sia $T \in End(\mathbb{R}^3)$ l'applicazione lineare tale che:
   $T(1,0,1) = (0,1,-1)$ $T(-1,1,0) = (1,0,1)$ $T(0,1,-1) = (1,1,0)$
   Trovare le matrici di cambiamento di base $M_{e,b}(\mathbb{I}_3)$ e $M_{b,e}(\mathbb{I}_3)$, dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $b = \{(1,0,1),(-1,1,0),(0,1,-1)\}$ e le matrici che rappresentano T rispetto a queste due basi.

4. Sia Π_3 lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata di grado ≤ 3 a coefficienti reali e $F : \Pi_3 \to \Pi_3$ l'applicazione lineare tale che $F(X^n) = n \cdot X^{n-1}$, per $n = 0,1,2,3$. Calcolarne nucleo e immagine e trovare $M_e(F)$ e $M_b(F)$, dove e è la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ e b è la base $\{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}$.

5. Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, v_2 \dots v_n \in V$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere; se vere, dimostrarle, altrimenti esibire un controesempio:
   (a) Se $F \in End(V)$ e $v_1, v_2 \dots v_n$ sono linearmente dipendenti, allora $F(v_1), F(v_2) \dots F(v_n)$ sono linearmente dipendenti.
   (b) Se $F \in End(V)$ e $v_1, v_2 \dots v_n$ sono linearmente indipendenti, allora $F(v_1), F(v_2) \dots F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.
   (c) Se $F \in GL(V)$ e $v_1, v_2 \dots v_n$ sono linearmente indipendenti, allora $F(v_1), F(v_2) \dots F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

6. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base di $\mathbb{R}^4$. Mostrare che non può esistere un'applicazione lineare $F \in End(\mathbb{R}^4)$ tale che:
   $F(e_1 + e_3) = e_1$ $F(e_2 + e_4) = e_2$ $F(e_1 + e_2) = e_3$ $F(e_3 + e_4) = e_4$

7. Siano U, V, W tre K-spazi vettoriali e $G : U \to V$ e $F : V \to W$ due applicazioni lineari. Mostrare che $\ker(G) \subseteq \ker(F \circ G)$ e $Im(F \circ G) \subseteq Im(F)$