Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. E. Sernesi
Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

Tutorato numero 12 (25 Maggio 2009)
Esercizi di preparazione al secondo esonero

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili ai seguenti indirizzi:
http://www.lifedreamers.it/liuck *http://www.mat.uniroma3.it/*

1. Dire se le seguenti applicazioni sono diagonalizzabili; quando possibile determinare una base di autovettori $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ e scrivere la formula di passaggio da $M_e(F)$ a $M_b(F)$ dove $e = e_1, e_2, e_3$ è la base canonica; verificare inoltre che la matrice $M_b(F)$ è diagonale.

   (a) $F(x, y, z) = (x + y + z, y, 2x + y + 2z)$
   (b) $F(x, y, z) = (y + \frac{3}{2}z, \frac{x}{2} + y + \frac{3}{2}z, -\frac{x}{2})$
   (c) $F(x, y, z) = (-x + y + z, 2x - 2y - 2z, -\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3})$

2. Trovare il valore del parametro h per cui le due rette r e s sono incidenti e, per quel valore, determinare il loro punto di intersezione:

   (a) $r : x + y + z - 1 = 0 = hy - z - 1 \qquad s : 3x - 1 = 0 = y - z$
   (b) $r : x + 2z - h = 0 = y - z \qquad s : x + hy + z = 0 = x - y + 3z$

3. Trovare il valore del parametro h per cui le due rette r e s sono parallele e, per quel valore, determinare il piano che le contiene entrambe:

   (a) $r : 2x + z + 1 = 0 = y - 2z \qquad s : 2x + hy - z = 0 = y - 2z + 1$
   (b) $r : y - z + h = 0 = x - y + 2z \qquad s : x + hy = 0 = 2x + y + z + 1$

4. Determinare la retta s dello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per il punto Q, incidente la retta r e contenuta nel piano π:

   (a) $Q = (-2, 1, 1) \qquad r : 3x - y - 3 = 0 = x - 2z - 3 \qquad \pi : x + y + z = 0$
   (b) $Q = (1, 2, 3) \qquad r : x + 2z - 2 = 0 = y + z \qquad \pi : x - y + 1 = 0$

5. Calcolare il rango delle seguenti applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, e trovare le matrici che le rappresentano rispetto alle basi canoniche e le matrici che le rappresentano rispetto alle basi $a = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e $b = \{(0, 0, -1, 1), (0, -1, 1, 0), (-1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$:

   (a) $F(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, x - y + z, x - y - z)$
   (b) $F(x, y, z) = (x - y, y - x, 0, x + y)$
   (c) $F(x, y, z) = (x + 3z, x - z, 3x + z, x + z)$

6. Sia $V = \mathbb{R}[X, Y]_3$ lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di terzo grado nelle due indeterminate X e Y a coefficienti reali e sia $F \in End(V)$ l'applicazione lineare che scambia le due indeterminate, cioè tale che: $F(X^3) = Y^3 \qquad F(X^2Y) = XY^2 \qquad F(XY^2) = X^2Y \qquad F(Y^3) = X^3$.
   Rappresentare tale applicazione in forma matriciale rispetto alla base canonica $\{X^3, X^2Y, XY^2, Y^3\}$, determinarne gli autovalori e i relativi autospazi e dire infine se è diagonalizzabile.

* Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare una base di ognuno dei seguenti sottospazi e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$:
$U = \langle (1, 1, 0, 0), (1, -1, -1, -2), (2, 0, -1, -2), (1, 2, 1, 2) \rangle$
$V = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (2, 1, 2, 0), (1, -1, 1, 0) \rangle$
$W = \langle (1, 0, 2, 0), (0, 1, 0, -1), (1, 0, 1, 1), (3, 1, 0, 0) \rangle$

** Determinare, al variare del parametro reale m, se i seguenti sistemi sono compatibili e in tal caso determinare esplicitamente tutte le soluzioni:

(a) $\begin{cases} x + y = m \\ y - 2z = 0 \\ mx + z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (m+1)x - z = -1 \\ mz = m \\ x + (m-1)y + z = -1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ mx + 2y - 2z = 1 \end{cases}$