Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 – Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

TUTORATO NUMERO 1 (26 FEBBRAIO 2009)

SPAZI VETTORIALI, SOMME E PRODOTTI TRA MATRICI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili ai seguenti indirizzi:
http://www.lifedreamers.it/liuck/
http://www.mat.uniroma3.it/

1. Enunciare la definizione di spazio vettoriale e dare a K^n una struttura di spazio vettoriale su K.

2. Sia A:={ $f: X \to K$ } l'insieme delle funzioni da un fissato insieme X a valori su un campo K. Dimostrare che A è uno spazio vettoriale su K con le seguenti operazioni:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$$

3. Sia H un campo e K un suo sottocampo. Mostrare che H è uno spazio vettoriale su K con le operazioni di somma e prodotto ivi definite.

4. Dimostrare che per ogni matrice quadrata si ha che $A \cdot {}^tA$ e $A + {}^tA$ sono matrici simmetriche, mentre $A - {}^tA$ è antisimmetrica. Dedurne che ognimatrice quadrata può essere scritta come somma di una matrice simmetrica e una antisimmetrica.

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Q})$. Calcolare:
$$A^2 - \mathbf{1}_3 \qquad ({}^tA)(2A + 3\mathbf{1}_3) \qquad ({}^tA + A)^2$$

6. Sia $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. Calcolare:
$$B\,{}^tB + B - ({}^tB)^2 \qquad 2B(B-\mathbf{1}_2) \qquad B^{3} - 2B$$

7. Sia $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$. Calcolare:
$$C^2 + (iC)^2 + i\mathbf{1}_2 \qquad i(C+\mathbf{1}) - ({}^tC)^2 \qquad i(C \cdot {}^tC)$$

8. Calcolare, quando possibile, le seguenti somme e prodotti fra matrici:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 13\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$A \cdot B \cdot C \qquad C \cdot B \cdot A \qquad C+(B \cdot A) \qquad (A+{}^tB) \cdot C \qquad A \cdot {}^tB \qquad {}^tA+B$