Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 1

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. E. Sernesi

Tutori: Andrea Abbate e Matteo Acclavio

Soluzioni del tutorato numero 9 (6 Maggio 2009)
Applicazioni lineari e matrici associate

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck/
http://www.mat.uniroma3.it/

1. Per calcolare le matrici di cambiamento di base, può essere utile "aiutarsi" con la base canonica, che semplifica i calcoli. Infatti, $M_{a,b}(\mathbb{I}) = M_{a,e}(\mathbb{I}) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I}) = (M_{e,a}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_{e,b}(\mathbb{I})$ e $M_{b,a}(\mathbb{I}) = (M_{a,b}(\mathbb{I}))^{-1} = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_{e,a}(\mathbb{I})$, dove e è la base canonica. Si noti che $M_{e,a}(\mathbb{I})$ e $M_{e,b}(\mathbb{I})$ possono essere ottenute semplicemente mettendo in colonna le coordinate dei vettori rispettivamente di a e di b.

   (a) $M_{a,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot$
   $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad M_{b,a}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} =$
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

   (b) $M_{a,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M_{b,a}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ -2 & -\frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $M_{a,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{b,a}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

   (d) $M_{a,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{b,a}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

2. Per determinare la matrice associata a F rispetto a v si può usare la formula $M_v(F) = M_{v,e}(\mathbb{I}) \cdot M_e(F) \cdot M_{e,v}(\mathbb{I}) = (M_{e,v}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_e(F) \cdot M_{e,v}(\mathbb{I})$, dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. La matrice $M_e(F)$ si calcola facilmente mettendo in colonna le immagini dei vettori della base canonica, ed è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, mentre $M_{e,v}(\mathbb{I})$ si ottiene anch'essa facilmente mettendo in colonna le coordinate dei vettori di v, e quindi è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Abbiamo quindi che $M_v(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Ragionando come sopra, abbiamo che $M_{w,v}(G) = M_{w,e'}(\mathbb{I}) \cdot M_{e',e}(G) \cdot M_{e,v}(\mathbb{I})$, dove e' è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si ha che $M_{w,e'}(\mathbb{I}) = (M_{e',w}(\mathbb{I}))^{-1}$, con quest'ultima matrice che si calcola in maniera analoga a $M_{e,v}(\mathbb{I})$. Si ha quindi che $M_{w,v}(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -14 \\ 1 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

$M_{v,w}(H) = M_{v,e}(\mathbb{I}) \cdot M_{e,e'}(H) \cdot M_{e',w}(\mathbb{I}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$M_w(I) = M_{w,e'}(\mathbb{I}) \cdot M_{e'}(I) \cdot M_{e',w}(\mathbb{I}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Le matrici di cambiamento di base sono $M_{e,b}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $M_{b,e}(\mathbb{I}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dal testo conosciamo le coordinate delle immagini dei vettori di b rispetto alla base canonica, quindi $M_{e,b}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Per trovare $M_e(T)$ è sufficiente calcolare, secondo la formula del cambiamento di base, $M_{e,b}(T) \cdot M_{b,e}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Analogamente, $M_b(T) = M_{b,e}(\mathbb{I})\cdot$

$M_{e,b}(T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. L'applicazione è definita come $F(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$, quindi affinché $F(p(x)) = 0$ dobbiamo imporre $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, quindi il nucleo è costituito dai polinomi costanti, cioè $\ker F = \mathbb{R}$; per l'immagine, notiamo che al variare di a_1, a_2, a_3 si trovano tutti e soli i polinomi di grado ≤ 2, quindi $Im(F) = \Pi_2$.

   La matrice rispetto alla base canonica si calcola facilmente ed è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Per trovare la matrice rispetto alla base b si può usare la formula del cambiamento di base $M_b(F) = (M_{e,b}(\mathbb{I}))^{-1} \cdot M_e(F) \cdot M_{e,b}(\mathbb{I})$. Si ha quindi $M_b(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$
   $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. (a) Vera. Infatti, se $v_1 \dots v_n$ sono linearmente dipendenti, allora $\exists a_1 \dots a_n \in K$ non tutti nulli tali che $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0$. Dalla linearità di F segue che $0 = F(0) = F(a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n) = a_1 \cdot F(v_1) + \cdots + a_n \cdot F(v_n)$, ma essendo $a_1 \dots a_n$ per ipotesi non tutti nulli, abbiamo che $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono linearmente dipendenti.

   (b) Falsa. Basta prendere come controesempio l'applicazione che manda tutti i vettori nello 0: in questo caso, qualsiasi n-upla di vettori, quindi in particolare una n-upla di vettori indipendenti, viene mandata in una n-upla di vettori tutti nulli, quindi dipendenti.

   (c) Vera. Dimostriamo che se $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono linearmente dipendenti, allora $v_1 \dots v_n$ sono linearmente dipendenti: se $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono linearmente dipendenti, allora $\exists a_1 \dots a_n \in K$ non tutti nulli tali che $a_1 \cdot F(v_1) + \cdots + a_n \cdot F(v_n) = 0$ Inoltre abbiamo che se $F \in GL(V)$, allora $\ker F = \{0\}$, quindi, per la linearità di F si ha che $0 = a_1 \cdot F(v_1) + \cdots + a_n \cdot F(v_n) = F(a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n) \Rightarrow a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0$, ma essendo $a_1 \dots a_n$ per ipotesi non tutti nulli, abbiamo che $v_1 \dots v_n$ sono linearmente dipendenti. (Alternativamente, si poteva ragionare nel seguente modo: $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i$, inoltre essendo F un automorfismo, $F(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$, quindi $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i \Leftrightarrow 0 = F(a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n) = a_1 \cdot F(v_1) + \cdots + a_n \cdot F(v_n)$, quindi $F(v_1) \dots F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.)

6. Una proprietà delle applicazioni lineari è che vettori linearmente dipendenti vengono mandati in vettori linearmente dipendenti (come era chiesto di dimostrare nell'esercizio precedente), ma in questo caso abbiamo che $\{e_1 + e_3, e_2 + e_4, e_1 + e_2, e_3 + e_4\}$ sono linearmente dipendenti (la somma dei primi due è uguale alla somma degli ultimi due) mentre ovviamente $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, essendo una base, non possono esserlo. (Alternativamente, si poteva notare che, se esistesse una siffatta applicazione lineare F, si avrebbe che $e_1 + e_2 = F(e_1 + e_3) + F(e_2 + e_4) = F(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = F(e_1 + e_2) + F(e_3 + e_4) = e_3 + e_4 \Rightarrow e_1 + e_2 - e_3 - e_4 = 0$, quindi avremmo trovato una combinazione lineare non banale di $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ che da il vettore nullo, cosa che è assurda in quanto i vettori in questione, essendo una base di $\mathbb{R}^4$, sono linearmente indipendenti.)

7. Mostriamo che se $u \in \ker(G)$, allora $u \in \ker(F \circ G)$ e che se $w \in Im(F \circ G)$ allora $w \in Im(F)$: $u \in \ker(G) \Leftrightarrow G(u) = 0_V \Rightarrow F(G(u)) = F(0_V) = 0_W \Rightarrow u \in \ker(F \circ G)$, quindi $\ker(G) \subseteq \ker(F \circ G)$.
$w \in Im(F \circ G) \Leftrightarrow \exists u \in U$ tale che $(F \circ G)(u) = F(G(u)) = w \Rightarrow \exists v = G(u)$ tale che $F(v) = w \Rightarrow w \in Im(F)$, quindi $Im(F \circ G) \subseteq Im(F)$.